

5 Funkce

Moji nepřátelé jsou hloupí pseudovědci, kteří se slepě drží Aristotela a které věda zajímá jen proto, aby dobře vypadali v talárech a měli za to dobrý plat. Kdyby žil Aristoteles dnes, byl by první, kdo by se obrátil proti zaslepcům, kteří stojí na jeho slovech.

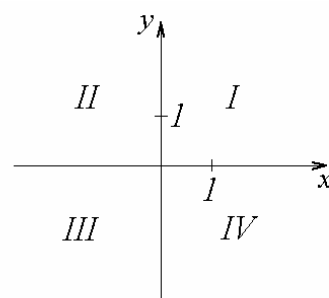
(Galileo Galilei)

5.1 Základní pojmy

V kpt. 1. jsme mluvili o zobrazení mezi množinami A, B . Připomeňme, že se jedná o libovolný **předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřadí nejvýše jeden prvek $b \in B$** . Jsou-li A, B číselné množiny, nazýváme toto zobrazení **funkcí** (zobrazení jsme v 1. kapitole označovali velkým F , funkci označujeme většinou malými písmeny $f, g, h, \dots$). Ve středoškolské matematice přitom pracujeme s tzv. reálnou funkcí jedné reálné proměnné (tj. $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ – jde o zobrazení v množině všech reálných čísel, čísla komplexní neuvažujeme). Je-li číslu $x \in A$ funkcí f přiřazeno číslo $y \in B$, píšeme $[x, y] \in f$ nebo častěji $y = f(x)$. Číslo x nazýváme **vzor – proměnná** (podrobněji nezávisle proměnná), číslo y **obraz – funkční hodnota** (popř. závisle proměnná). Množinu všech vzorů nazýváme **definičním oborem** – ozn. $D(f)$, množinu všech obrazů **oborem hodnot** funkce f – ozn. $H(f)$. **Dvě funkce f_1, f_2 jsou si navzájem rovny** právě tehdy, když se rovnají jejich definiční obory [tj. $D(f_1) = D(f_2)$] a pro každé $x \in D(f_1) = D(f_2)$ je $f_1(x) = f_2(x)$.

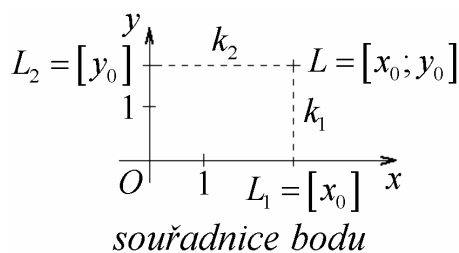
Funkce slouží k matematickému vyjádření závislosti dvou veličin. Tyto závislosti (funkce) můžeme vyjádřit tabulkou, rovnicí nebo grafem. Dříve než přejdeme k některým příkladům, zopakujeme některé důležité pojmy:

Pravoúhlou soustavou souřadnic v rovině rozumíme dvojici navzájem kolmých číselných os. Jejich průsečík nazýváme **počátkem** souřadné soustavy (značíme obvykle O). Číselné osy nazýváme **souřadnými osami** a značíme obvykle x, y , přičemž osa x je obvykle vodorovná orientovaná zleva doprava, osa y svislá orientovaná zdola nahoru. Souřadnou soustavu, kde velikost jednotek na obou osách bude stejná, budeme značit $\langle O, x, y \rangle$ a nazývat **kartézskou souřadnou soustavou** (podle francouzského filozofa a matematika René Descarta – lat. Cartesianus). Souřadné osy rozdělí rovinu na čtyři pravé úhly – **kvadranty**. Ty číslujeme většinou římskými číslicemi. První kvadrant je ohraničen kladnými poloosami, další následují **v kladném směru – proti směru chodu hodinových ručiček**.



souřadná soustava, kvadranty

Souřadnice bodu v rovině: Každému bodu L v rovině s kartézskou soustavou $\langle O, x, y \rangle$ přiřadíme uspořádanou dvojici čísel $[x_0, y_0]$ takto: číslo x_0 je souřadnice paty L_1 kolmice spuštěné z bodu L na osu x , číslo y_0 je souřadnice paty L_2 kolmice spuštěné z bodu L na osu



souřadnice bodu

y (souřadnice bodu na přímce – viz kpt. 2.4.). Naopak každé uspořádané dvojici $[x_0, y_0]$ reálných čísel přiřadíme bod L takto: Sestrojíme body $L_1 = [x_0] \in x$, $L_2 = [y_0] \in y$, z bodu L_1 vztyčíme kolmici l_1 na osu x , z L_2 kolmici l_2 na osu y . Bod L najdeme pak jako průsečík těchto kolmic, tj. $L \in l_1 \cap l_2$. Říkáme, že bod L **má v soustavě** $\langle O, x, y \rangle$ souřadnice $[x_0, y_0]$, píšeme $L = [x_0, y_0]$.

1. Příklad: Automobil má v nádrži 40 litrů benzínu a spotřebuje 8 litrů na 100 km. Vyjádřete množství benzínu v nádrži jako funkci ujeté vzdálenosti.

Řešení: Zde množství benzínu v nádrži závisí na ujeté vzdálenosti, proto je ujetá vzdálenost nezávisle proměnná (x), množství benzínu v nádrži je pak závisle proměnná (y). S daným množstvím paliva ujedeme maximálně 500 km, definičním oborem je tedy množina $D(f) = \langle 0; 500 \rangle$, množství paliva v nádrži může nabýt hodnot $H(f) = \langle 0; 40 \rangle$.

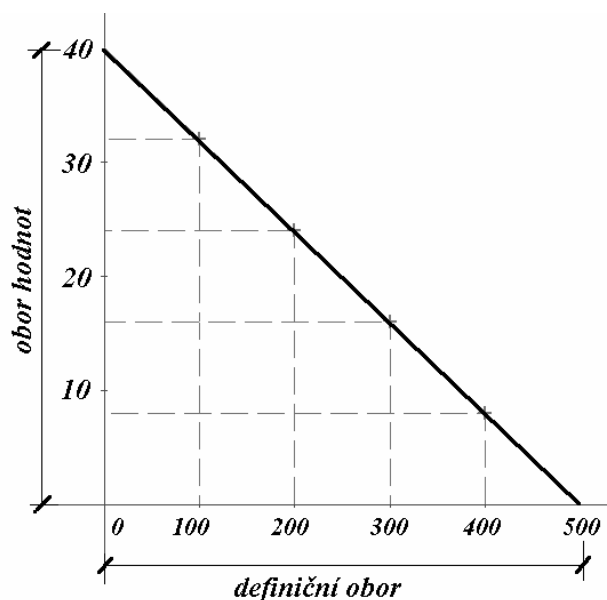
Tabulka zachycuje některé hodnoty nezávisle a závisle proměnné, např:

x	0	100	200	300	400	500
y	40	32	24	16	8	0

Rovnice

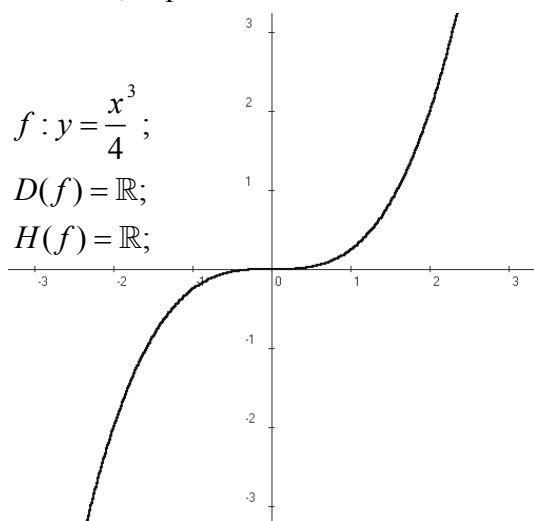
$$y = 40 - 0,08x$$

Graf: Grafem funkce rozumíme množinu všech bodů roviny, jejichž souřadnice vyhovují její rovnici

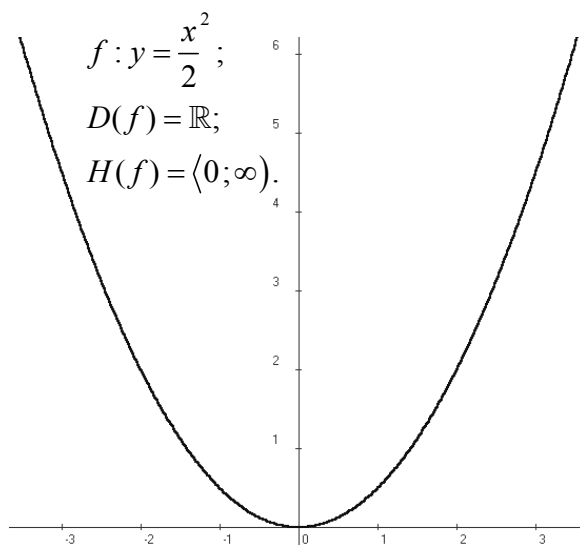


5.2 Vlastnosti funkcí

Lichá funkce $-\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$
 graf je souměrný podle počátku soustavy
 souřadnic, například:

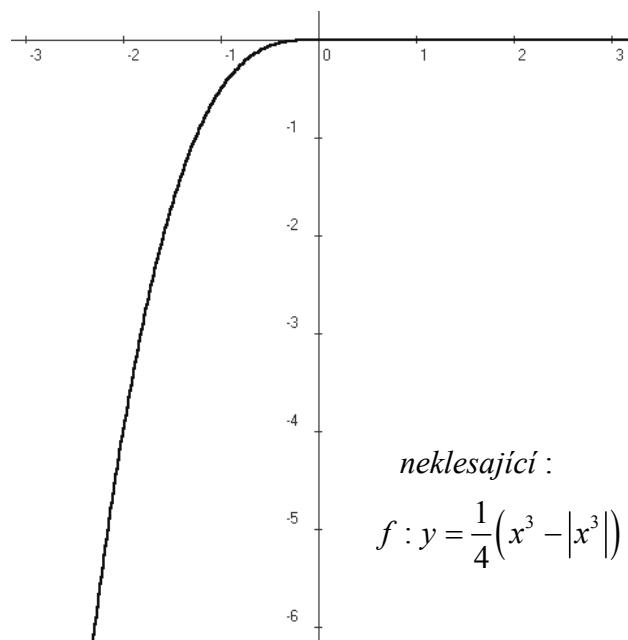
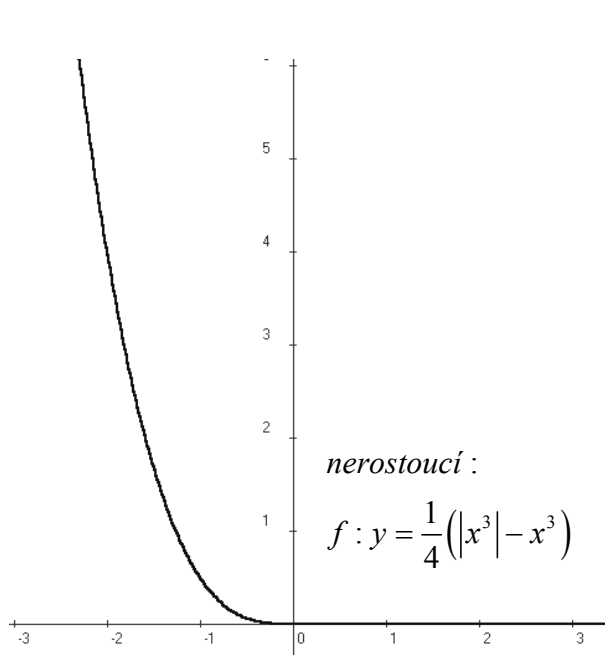


Sudá funkce $-\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$
 graf je souměrný podle osy y , například:



K tomu, aby pro každé $x \in D(f)$ mohlo platit $f(-x) = -f(x)$, resp. $f(-x) = f(x)$, musí obě funkční hodnoty $f(-x); f(x)$ existovat. Pro lichou i sudou funkci musí tedy být $[x \in D(f)] \Leftrightarrow [-x \in D(f)]$. Samotný definiční obor liché resp. sudé funkce je souměrný podle počátku, resp. podle osy y .

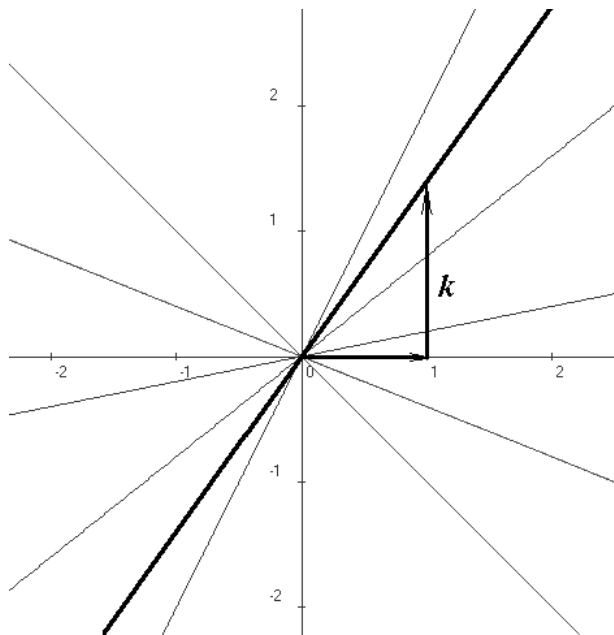
Je-li $I \subseteq D(f)$ interval, pak funkce $f(x)$ je na tomto intervalu **klesající** – pokud s rostoucím x klesá y , **rostoucí** – pokud s rostoucím x roste také y (např. funkce $g: y = \frac{x^2}{2}$ je na $I = (-\infty; 0)$ klesající, na $I = \langle 0; \infty \rangle$ rostoucí), **monotonní** – je funkce, která je buď rostoucí nebo klesající, **nerostoucí** – pokud s rostoucím x neroste y , **neklesající** – pokud s rostoucím x neklesá y .



5.3 Elementární funkce

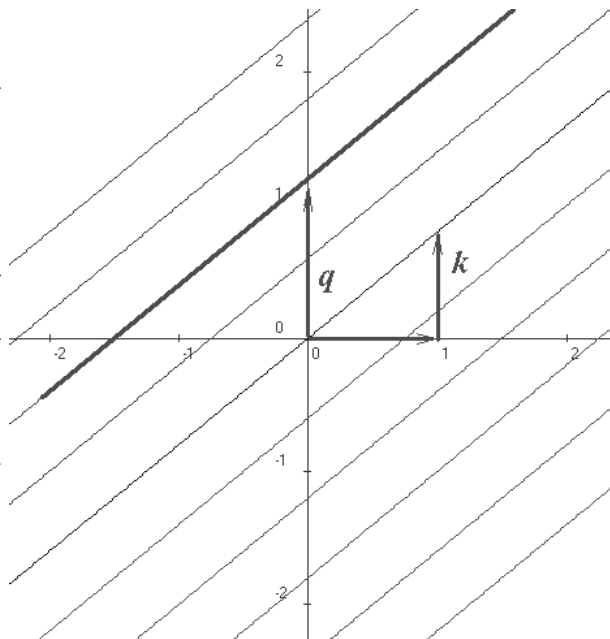
Přímá úměrnost:

Je každá funkce na $\mathbb{R}$ definovaná rovnicí $f: y = k \cdot x$; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem.



Lineární funkce:

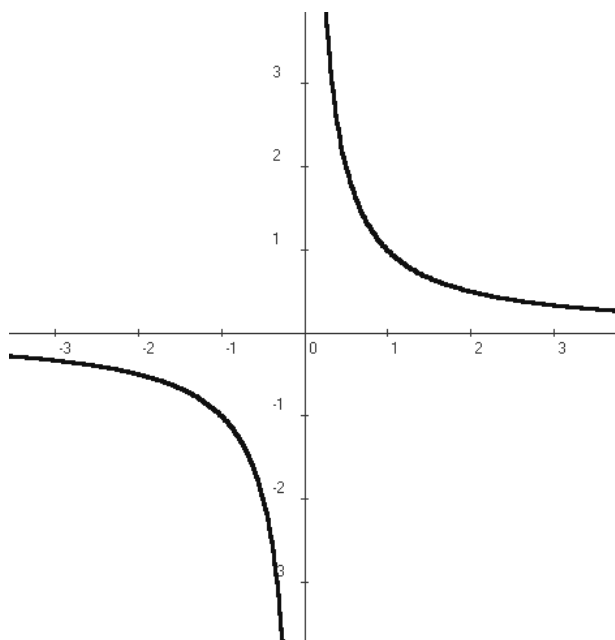
Je každá funkce na $\mathbb{R}$ daná rovnicí $f: y = k \cdot x + q$; $k, q \in \mathbb{R}$. V případě $k = 0$ dostaneme funkci konstantní. Grafem lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou y .



Nepřímá úměrnost:

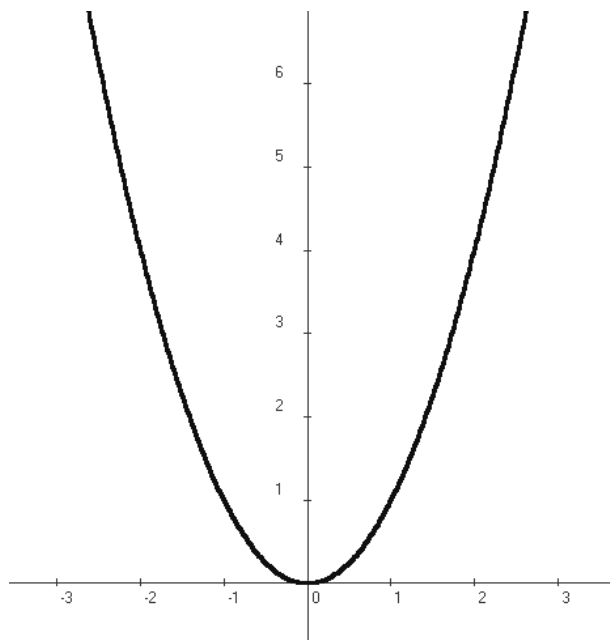
Je každá funkce definována rovnicí $f: y = \frac{k}{x}$; $k \in \mathbb{R}$; $D(f) = H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Grafem je rovnoosá hyperbola (připojen graf pro $k = 1$).



Kvadratická funkce:

Je každá funkce definována rovnicí $f: y = x^2$. Grafem je parabola. $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$



1. Příklad: Z pole o výměře 16 hektarů se sklídilo 368 t cukrovky. Kolik tun by se sklídilo z 22 hektarů, předpokládáme-li stejný hektarový výnos?

Řešení:

a) Čím větší plochu osejeme, tím více cukrovky sklídíme. **Množství cukrovky** y je tedy **přímo úměrné oseť ploše** x , tedy $y = k \cdot x$. Víme, že pro $x = 16$ je $y = 368$, pro konstantu k úměrnosti dostáváme $k = \frac{y}{x} = \frac{368}{16} = 23$. Pro $x = 22$ dostáváme $y = k \cdot x = 23 \cdot 22 = 506$. Z 22 hektarů by se sklídilo tedy 506 tun cukrovky.

Toto řešení je tzv. **řešení přechodem přes jednotku** (konstanta úměrnosti zde má význam hektarového výnosu, tj. množství cukrovky sklizeného z jednoho hektaru). Úlohu však můžeme řešit také **trojčlenkou**, tj. rovností dvou poměrů:

b)

↑	16 ha	368 t	↑
↑	22 ha	x t	↑

$$\frac{x}{368} = \frac{22}{16} \Rightarrow x = \frac{22 \cdot 368}{16} = 506.$$

2. Příklad: Kniha má 126 stran po 40 řádcích. Kolik stran bude mít v novém vydání, bude-li na stránce 36 stejně dlouhých řádků?

Řešení:

a) Čím kratší budou stránky, tím jich bude více. **Počet stran** y je tedy **nepřímo úměrný jejich délce** x , tedy $y = \frac{k}{x}$. Víme, že pro $x = 40$ je $y = 126$, pro konstantu k úměrnosti

dostáváme $k = x \cdot y = 40 \cdot 126 = 5\,040$. Pro $x = 36$ dostáváme $y = \frac{k}{x} = \frac{5\,040}{36} = 140$.

Nové vydání bude tedy mít 140 stran.

I toto řešení je přechodem přes jednotku. Konstanta úměrnosti v tomto případě vyjadřuje počet řádků knihy, tedy počet stran v případě, že na každé z nich by byl jediný řádek. Také nepřímou úměrnost můžeme řešit trojčlenkou:

b)

↓	40 řádků	126 stran	↑
↓	36 řádků	x stran	↑

$$\frac{x}{126} = \frac{40}{36} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 126}{36} = 140$$

Procenta a promile:

Speciální úlohy na přímou úměrnost jsou úlohy na procenta a promile. Procento je jedna setina, promile pak jedna tisícina celku (základu). V těchto úlohách se volí reálné číslo z jako **základ** (100%, popř. 1000‰), **počet procent**, popř. promile p a příslušná **část základu** $č$. Na nižších stupních jsme rozlišovali tři typy úloh na procenta: určování základu, určování počtu procent a určování části základu (procentové části). Všechny tyto úlohy jsou však úlohami na přímou úměrnost – čím větší je počet procent, tím větší je procentová část.

3. Příklad: Chceme získat 150 g pětiprocentního roztoku soli ve vodě. Kolik vody a kolik soli potřebujeme?

Řešení: Určíme např. množství vody, množství soli pak snadno dopočítáme. Pětiprocentní roztok obsahuje 95% vody a 5% soli: Pro vodu tedy máme:

$$\begin{array}{rcl} \uparrow & 100 \% & \dots\dots\dots 150 \text{ g} \uparrow \\ & 95 \% & \dots\dots\dots x \text{ g} \uparrow \\ \hline & \frac{x}{150} = \frac{95}{100} \Rightarrow x = \frac{95 \cdot 150}{100} = 142,5 \end{array}$$

K získání předepsaného roztoku budeme potřebovat 142,5 g vody a 7,5 g soli.

4. Příklad: V kolika gramech vody je třeba rozpustit 18 g soli, máme-li získat devítiprocentní roztok?

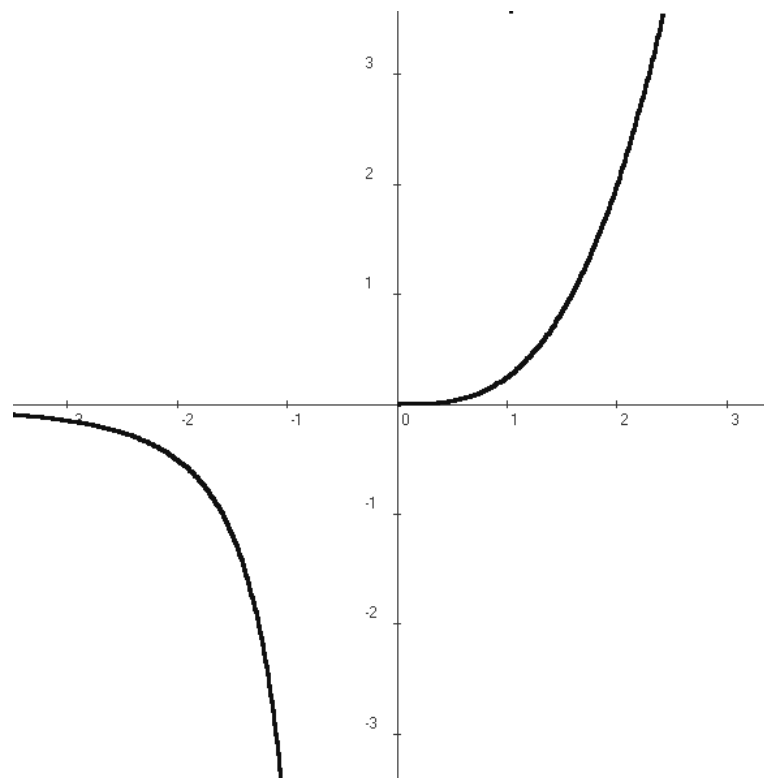
Řešení: 18 g soli tvoří 9% roztoku, hledané množství vody pak zbylých 91%:

$$\begin{array}{rcl} \uparrow & 9 \% & \dots\dots\dots 18 \text{ g} \uparrow \\ & 91 \% & \dots\dots\dots x \text{ g} \uparrow \\ \hline & \frac{x}{18} = \frac{91}{9} \Rightarrow x = \frac{91 \cdot 18}{9} = 182 \end{array}$$

K získání předepsaného roztoku budeme potřebovat 182 g vody.

5.4 Funkce prostá a inverzní

V kpt. 1 jsme hovořili o prostém zobrazení. Pojmem funkce označujeme speciální zobrazení, kde definičním oborem i oborem hodnot jsou číselné množiny. Tedy: Zobrazení F (funkce f) je prosté (prostá) právě



tehdy, když každý prvek y jeho (jejího) oboru hodnot $H(F)$ [$H(f)$] je obrazem právě jednoho prvku x jeho (jejího) definičního oboru $D(F)$ [$D(f)$]. U funkcí používáme většinou následující ekvivalentní (rovnocennou) definici:

Funkce f je **prostá** právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in D(f)$; $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkce prostá a monotónní: Často se setkáváme s názorem, že funkce monotónní a prostá je jedno a totéž. To ovšem není pravda, jak se přesvědčíme následujícím příkladem:

1. Příklad: Sestrojme graf funkce definované takto:

$$f : y = \begin{cases} \frac{4}{x^3} & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x^3}{4} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Tato funkce je prostá, neboť každá dvě různá $x_1; x_2$ mají skutečně dvě různé funkční hodnoty $f(x_1); f(x_2)$. Není však monotonní, neboť na intervalu $(-\infty; 0)$ klesá, kdežto na intervalu $\langle 0; \infty$ roste (viz graf na předchozí straně).

Každá monotonní funkce je prostá, ale tuto větu nelze obrátit – **ne každá prostá funkce je monotonní**. Monotonnost funkce je podmínka dostačující k tomu, aby funkce byla prostá, ale není to podmínka nutná.

Inverzní funkce: Mějme funkci $f : y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot $H(f)$. Tato funkce přiřazuje každému vzoru $x \in D(f)$ právě jeden obraz $y \in H(f)$, pro který je $y = f(x)$. Sestrojme předpis (označme ho f^{-1}), který naopak každému obrazu $y \in H(f)$ přiřadí vzor $x \in D(f)$ tak, že $x = f^{-1}(y)$. Jestliže je původní funkce f **prostá**, pak předpis f^{-1} je opět funkcí, tj. každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě jedno $x \in D(f)$. Tuto funkci pak nazýváme **funkcí inverzní k funkci f** . Mějme v kartézské soustavě $\langle O, x, y \rangle$ sestrojen graf prosté funkce $y = f(x)$. Uvažujme kartézskou souřadnou soustavu $\langle O, y', x' \rangle$ týmž počátkem, kde kladná poloosa x' splyne s kladnou poloosou y a kladná poloosa y' splyne s kladnou poloosou x . Pak graf funkce $y = f(x)$ v soustavě $\langle O, x, y \rangle$ splyne s grafem funkce $x = f^{-1}(y)$ v soustavě $\langle O, y', x' \rangle$. Většinou však sestrojujeme graf funkce f^{-1} v původní soustavě $\langle O, x, y \rangle$, což odpovídá vzájemné záměně proměnných $x; y$. Funkční předpis $x = f^{-1}(y)$ pak přejde na tvar $y = f^{-1}(x)$. Pro funkci f^{-1} inverzní k funkci f pak platí:

Definiční obor funkce f se rovná oboru hodnot funkce f^{-1} , tj. $D(f) = H(f^{-1})$.

Obor hodnot funkce f se rovná definičnímu oboru funkce f^{-1} , tj. $H(f) = D(f^{-1})$.

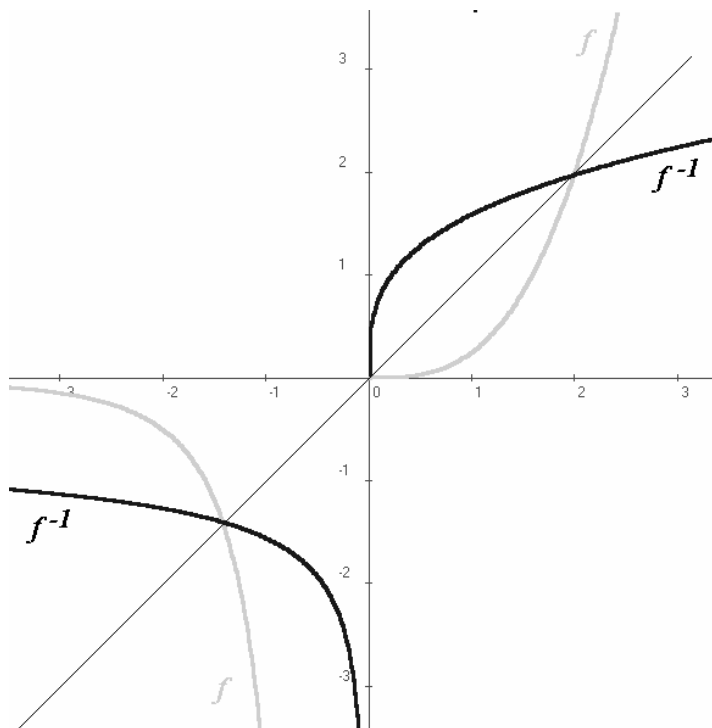
Pro každé $x \in D(f) = H(f^{-1})$ a každé $y \in H(f) = D(f^{-1})$ je $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.

Grafy funkcí $f; f^{-1}$ sestrojené v téže kartézské souřadné soustavě jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

2. Příklad: Sestrojme funkci inverzní k funkci z předchozího příkladu.

Řešení: Protože funkce f je prostá, můžeme inverzní funkci sestrojit. Funkce je definovaná na množině $D(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 0; \infty \rangle = \mathbb{R}$. Pro $x \in (-\infty; 0)$ je $4x^{-3} \in (-\infty; 0)$, pro $x \in \langle 0; \infty \rangle$ je $\frac{x^3}{4} \in \langle 0; \infty \rangle$. Oborem hodnot funkce f je množina $H(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 0; \infty \rangle = \mathbb{R}$. Pro inverzní funkci f^{-1} tak máme: $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$, $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Funkční předpis funkce f^{-1} získáme záměnou proměnných ve funkčním předpisu funkce f . Pro $x \in (-\infty; 0)$ tedy máme



$$f^{-1} : x = \frac{4}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{4}{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{4}{x}}$$

pro $x \in \langle 0; \infty \rangle$ je

$$f^{-1} : x = \frac{y^3}{4} \Rightarrow y^3 = 4x \Rightarrow y = \sqrt[3]{4x}$$

Graf funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky $y = x$ (na obrázku vlevo je graf funkce f sestrojen světlejší barvou).

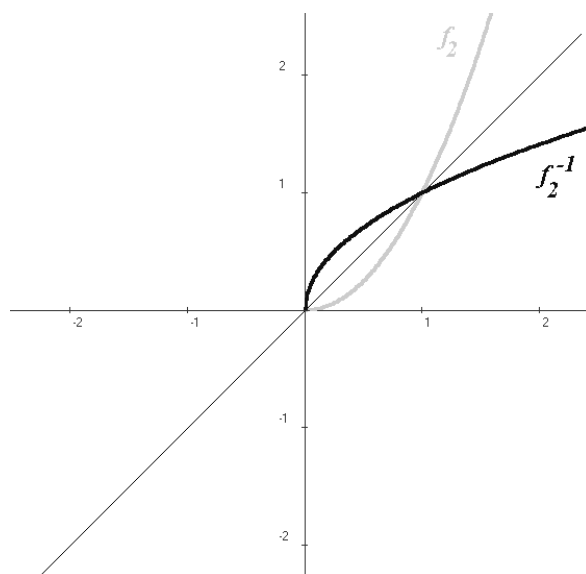
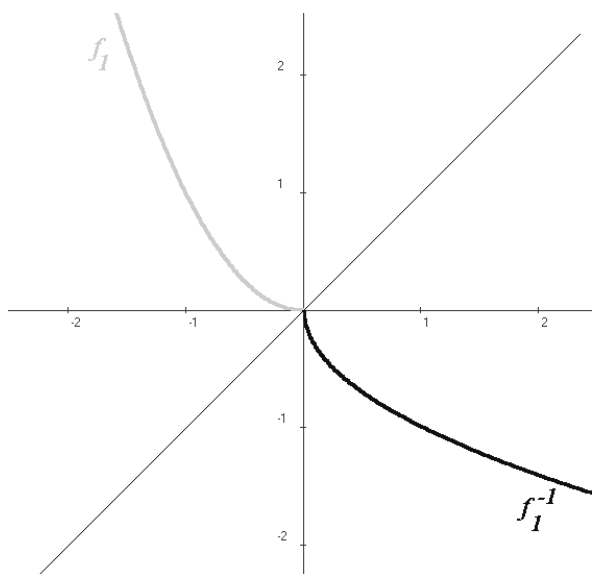
Zřejmě pod dojmem představy, že u inverzní funkce je „všechno naopak“, studenti často tvrdí, že pokud funkce f klesá, funkce f^{-1} roste a naopak. Ovšem tak tomu není. Jak je patrné už z pohledu na připojený obrázek, na intervalu $(-\infty; 0)$ obě funkce současně klesají a na $\langle 0; \infty \rangle$ obě současně rostou. Platí věty:

Funkce f^{-1} **klesá** právě tehdy, když **klesá** funkce f .

Funkce f^{-1} **roste** právě tehdy, když **roste** funkce f .

3. Příklad: Sestrojme inverzní funkci k funkci $f : y = x^2$.

Řešení: Daná funkce je definována na celé množině $\mathbb{R}$, na celém definičním oboru však není prostá, neboť např. $f(-2) = f(2) = 4$. Pokud tedy chceme inverzní funkci sestavit, je třeba definiční obor zúžit tak, aby na tomto zúženém oboru funkce byla prostá. Funkce $f : y = x^2$ na intervalu $(-\infty; 0)$ klesá, na $\langle 0; \infty \rangle$ roste, na těchto intervalech je tedy prostá. Lze tedy sestavit inverzní funkci ke dvěma různým funkcím, a to k funkci $f_1 : y = x^2; D(f_1) = (-\infty; 0)$ a k funkci $f_2 : y = x^2; D(f_2) = \langle 0; \infty \rangle$.



Pro funkci $f_1 : y = x^2; D(f_1) = (-\infty; 0)$ máme $H(f_1) = \langle 0; \infty \rangle$. Funkční předpis funkce k ní inverzní je $f_1^{-1} : x = y^2$ a je třeba vyjádřit y . Pro číslo y řešíme tedy kvadratickou rovnici s parametrem x , která má obecně dva různé reálné kořeny $y = \pm\sqrt{x}$. Musíme si ovšem uvědomit, že $x \in D(f_1^{-1}) = H(f_1) = \langle 0; \infty \rangle$, tj. číslo x je nezáporné; $y \in H(f_1^{-1}) = D(f_1) = (-\infty; 0)$ – číslo y je ovšem záporné (rovnici $y^2 = x$ řešíme na intervalu $y \in (-\infty; 0)$). V tom případě ovšem vyhovuje pouze jedno řešení, a to $y = -\sqrt{x}$. Je tedy $f_1^{-1} : y = -\sqrt{x}$.

Pro funkci $f_2 : y = x^2; D(f_2) = \langle 0; \infty \rangle$ je opět $H(f_2) = \langle 0; \infty \rangle$. Funkční předpis funkce f_2^{-1} opět vychází z předpisu $f_2^{-1} : x = y^2$, tentokrát ovšem je $x \in D(f_2^{-1}) = H(f_2) = \langle 0; \infty \rangle$ (x je opět kladné), ale $y \in H(f_2^{-1}) = D(f_2) = \langle 0; \infty \rangle$ (y je tentokrát kladné), je tedy $f_2^{-1} : y = \sqrt{x}$.

5.5 Funkce exponenciální a logaritmická

Exponenciální funkce: Je funkce určená rovnicí $f : y = a^x$; kde $a > 0$; $a \neq 1$. Podmínka $a > 0$ je nutná k tomu, aby mocnina byla definována pro každé reálné x , tj. $D(f) = \mathbb{R}$. Pro $a = 1$ by se jednalo o konstantní funkci $f : y = 1$. Oborem hodnot je $H(f) = (0; \infty)$.

1. Příklad: Sestrojme grafy funkcí $f_1 : y = 2^x$; $f_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$f_1 : y = 2^x$:

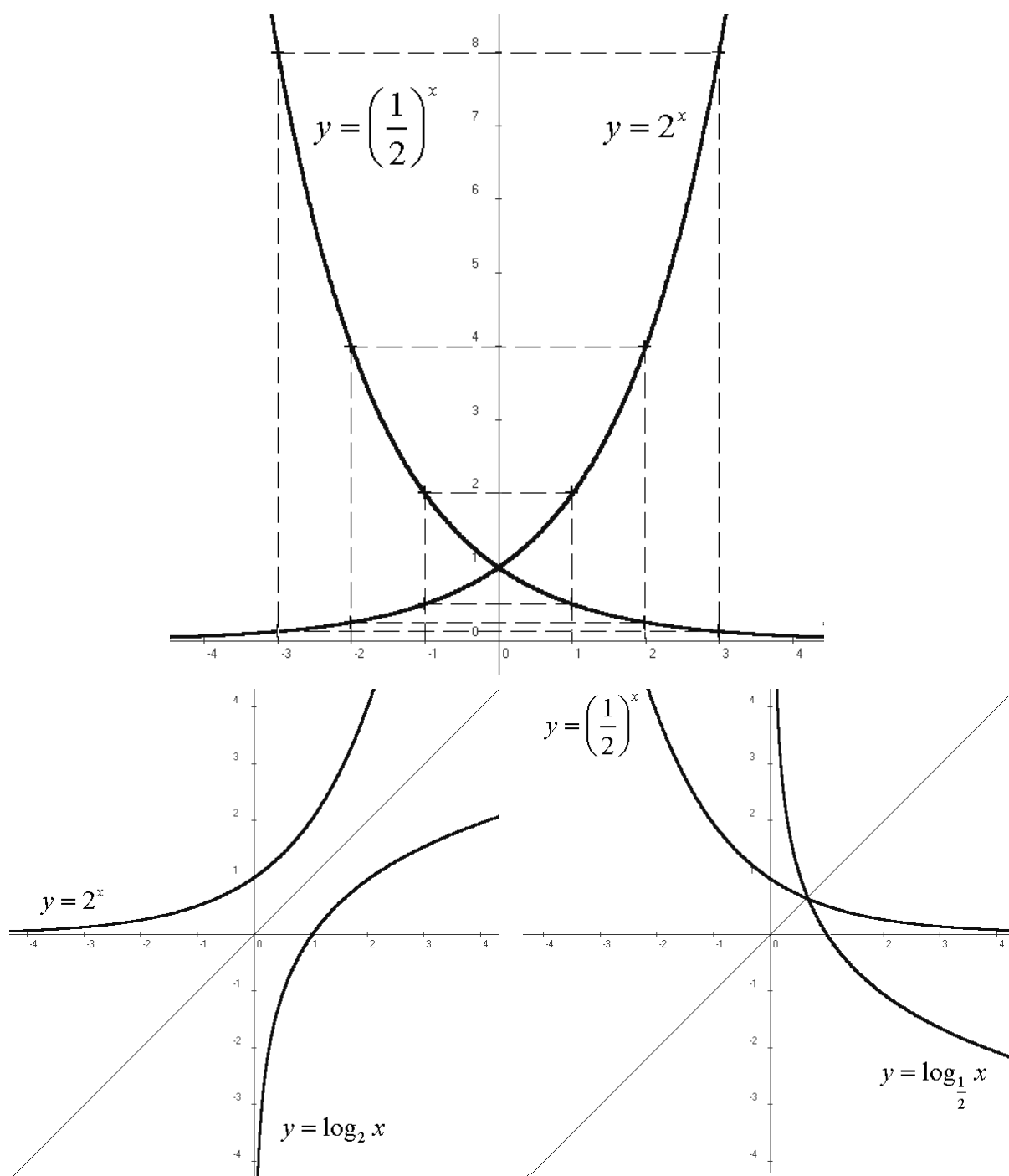
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2^{-5} = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	2	4	8

$f_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Exponenciální funkci o základu $a = 10$, tj. $y = 10^x$, nazýváme **dekadickou exponenciální funkcí**. Zvláště důležitá je **exponenciální funkce** $y = e^x$ [$y = \exp(x)$], jejímž základem je číslo $a = e = 2.718\ 281\dots$ (Eulerovo číslo).

Logaritmická funkce: Exponenciální funkce $y = a^x$ je monotonní na celém svém definičním oboru, a to pro $a \in (0; 1)$ klesající, pro $a \in (1; \infty)$ rostoucí. Je tedy možno k ní sestavit funkci inverzní: $f^{-1} : x = a^y$; kde $a > 0$; $a \neq 1$. Protože $D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = (0; \infty)$, je $D(f^{-1}) = H(f) = (0; \infty)$; $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$. Tato funkce přiřazuje každému $x \in (0; \infty)$ číslo $y \in \mathbb{R}$, na které je třeba umocnit daný základ a , abychom obdrželi hodnotu nezávisle



proměnné x . Tato funkce se nazývá logaritmická funkce se základem a , značíme ji $\log_a$. Místo $f^{-1} : x = a^y$ tedy píšeme $f^{-1} : y = \log_a x$. Pro $a = 10$ píšeme místo $\log_{10} x$ většinou jen $\log x$ (dekadický logaritmus), pro $a = e = 2,718\ 281\dots$ píšeme místo $\log_e x$ většinou $\ln x$ nebo $\lg x$ (přirozený logaritmus).

Vlastnosti logaritmické funkce: je monotonní, tudíž prostá, tj. pro každé $x_1 \neq x_2$ je $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$; pro $a \in (0;1)$ je klesající, pro $a \in (1;\infty)$ je rostoucí.

Platí např. $\log_5 5 = 1$, neboť $5^1 = 5$; $\log_5 25 = 2$ neboť $5^2 = 25$;
 $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, neboť $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ neboť $5^{-2} = \frac{1}{25}$;
 $\log 10 = 1$, neboť $10^1 = 10$; $\log 100 = 2$ neboť $10^2 = 100$;
 $\log \frac{1}{10} = -1$, neboť $10^{-1} = \frac{1}{10}$; $\log \frac{1}{100} = -2$ neboť $10^{-2} = \frac{1}{100}$;
 $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$, neboť $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$; $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$ neboť $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$;
 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 1$, neboť $\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = 2$ neboť $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$;
 $\log_5 1 = \log 1 = \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$, neboť $5^0 = 10^0 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$.

Pro každé $X \in \mathbb{R}$ a každé $A \in (0;1) \cup (1;\infty)$ je

$$\boxed{X = A^{\log_A X}}.$$

Je-li tedy např. $x = a^{\log_a x}$; $y = a^{\log_a y}$, pak $x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$ a podle pravidel o počítání s mocninami je $x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y}$. Položíme-li však nyní $x \cdot y = X$; $a = A$; $\log_a x + \log_a y = Y$, je podle předchozího rámečku:

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{X} = \boxed{A}^{\boxed{Y}} & \Leftrightarrow & \boxed{Y} & = \log_{\boxed{A}} \boxed{X} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \boxed{x \cdot y} = \boxed{a}^{\log_a x + \log_a y} & \Leftrightarrow & \log_a x + \log_a y & = \log_{\boxed{a}} \boxed{(x \cdot y)} & \Rightarrow & \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y) \end{array}$$

Podobně bychom odvodili další vlastnosti:

Nechť $a > 0$; $a \neq 1$ a $x, y > 0$ jsou libovolná kladná reálná čísla. Pak

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad (r \in \mathbb{R})$$

Je-li $r = \frac{1}{n}$; kde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, pak z posledního vzorce dostáváme $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$.

Příklady:

Pro přípustné hodnoty upravme pomocí výše uvedených pravidel:

1) $\log_2 2x(x-1) = \log_2 2 + \log_2 x + \log_2 (x-1) = 1 + \log_2 x + \log_2 (x-1)$

2) $\log_3 \frac{27x^5}{(x+5)^3} = \log_3 27 + 5 \log_3 x - 3 \log_3 (x+5) = 3 + 5 \log_3 x - 3 \log_3 (x+5)$

3) $\ln \frac{(x+1)^{(x-1)}}{x} = (x-1) \ln(x+1) - \ln x$

$$4) \log_4 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \log_4 4 + \log_4 \pi + 3 \log_4 r - \log_4 3 = 1 + \log_4 \pi + 3 \log_4 r - \log_4 3$$

Naopak:

$$5) 2 + 2 \log_4 x - \log_4 (x + 2) = \log_4 16 + \log_4 \frac{x^2}{x + 2} = \log_4 \frac{16x^2}{x + 2}$$

$$6) a \ln a + \ln(a^2 - 1) - \ln(a + 1) - 6 \ln a = \ln \frac{a^a (a^2 - 1)}{a^6 (a + 1)} = \ln [a^{a-6} (a - 1)]$$

$$7) 2 \log 3r^2 + 3 \log 4r^3 - 4 \log 2r^2 + 4 \log 6r = \log \frac{(3r^2)^2 \cdot (4r^3)^3 \cdot (6r)^4}{(2r^2)^4} = \\ = \log \frac{3^2 \cdot 4^3 \cdot 6^4 \cdot r^4 \cdot r^9 \cdot r^4}{2^4 \cdot r^8} = \log \frac{3^2 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot r^{17}}{2^4 \cdot r^8} = \log(2^6 \cdot 3^6 \cdot r^9) = \log 6^6 r^9$$

$$8) \log c + \log d + \frac{1}{2} \log E - \log S - \frac{1}{2} \log \rho = \log \frac{c \cdot d \cdot \sqrt{E}}{S \cdot \sqrt{\rho}} = \log \left(\frac{cd}{S} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$$

Neřešené úlohy:

$$1) \log(2x^4 y^3) \quad 2) \log \frac{x_1 x_2^2}{x_3 x_4^4} \quad 3) \log \sqrt{\frac{xy}{z^2}} \quad 4) \log \sqrt[3]{x \sqrt{x+y}} \quad 5) \frac{1}{2} (\log 18 - 0.5 \log 3)$$

$$6) \log 3 + \log a + \frac{1}{3} (2 \log b + \log c) \quad 7) \log 2\pi + 0.5 (\log l - \log 2 - \log g)$$

Výsledky

$$1) \log 2 + 4 \log x + 3 \log y \quad 2) \log x_1 + 2 \log x_2 - \log x_3 - 4 \log x_4 \quad 3) \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y - \log z \quad 4) \\ \frac{1}{3} \log x + \frac{1}{6} \log(x + y) \quad 5) \log \sqrt{\frac{18}{\sqrt{3}}} \quad 6) \log(3a \sqrt[3]{2bc}) \quad 7) \log \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \right)$$

5.6 Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální rovnice je každá rovnice, ve které je neznámá $x \in \mathbb{R}$ v exponentu nějaké mocniny. Nejjednodušší exponenciální rovnice jsou rovnice tvaru $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, kde $a > 0$; $a \neq 1$. Rovnají-li se základy mocnin, musí se rovnat i jejich exponenty, tato rovnice je tedy ekvivalentní s rovnicí $f(x) = g(x)$ – viz př. 1. Dále jsou to rovnice nejruznějších tvarů, které však lze úpravami využívajícími vlastnosti mocnin převést na předchozí případ (viz př. 2–5).

1. Příklad:

$$3^{x^2+10x+10} = 3^{x^2+4x-2} \\ x^2 + 10x + 10 = x^2 + 4x - 2 \\ 6x = -12 \\ x = -2$$

2. Příklad:

$$2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2} \\ 2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5} \\ x^2 - 6x - 2,5 = 4,5 \\ x_1 = 7; x_2 = -1$$

3. Příklad:

$$3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5} \\ 3^3 \cdot 3^{3(2x-3)} = 3^{4(3x-5)} \\ 3 + 3(2x-3) = 4(3x-5) \\ x = \frac{7}{3}$$

4. Příklad:

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{512}{125}\right)^{3-x}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left(\frac{8^3}{5^3}\right)^{3-x}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2x+1}{x-1}} = \left[\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}\right]^{3-x}$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = -3(3-x)$$

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{2}{3}$$

5. Příklad:

$$\frac{2^{x+3} \cdot 3^{x+2}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-1}} = \frac{9^{x-2}}{3}$$

$$\frac{2^{x+3} \cdot 3^{x+2}}{2^{7-x} \cdot 3^{7-x} \cdot 2^{3(x-1)}} = 3^{2(x-2)-1}$$

$$2^{(x+3)-(7-x)-3(x-1)} \cdot 3^{(x+2)-(7-x)} = 3^{2x-5}$$

$$2^{-x-1} \cdot 3^{2x-5} = 2^0 \cdot 3^{2x-5} / : 3^{2x-5}$$

$$2^{-x-1} = 2^0$$

$$-x-1 = 0$$

$$x = -1$$

Dále jsou to rovnice tvaru $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, $a \neq b$. V některých případech je možno tuto rovnici upravit na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ a řešit předchozím způsobem (viz př. 6). Pokud ne, je třeba řešit logaritmováním (viz. př. 7). Následují opět rovnice nejrůznějších tvarů, které lze na tvar $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ převést a řešit logaritmováním (viz př. 8). Pozor! Logaritmování rovnice nepatří k ekvivalentním úpravám. Součástí tohoto řešení je tedy zkouška. Některé exponenciální rovnice lze substitucí převést na rovnice algebraické (viz př. 9).

6. Příklad:

$$5^{1-x} = 7^{x-1} / \cdot 7^{1-x}$$

$$5^{1-x} \cdot 7^{1-x} = 7^0$$

$$(5 \cdot 7)^{1-x} = 1$$

$$35^{1-x} = 35^0$$

$$1-x = 0$$

$$x = 1$$

7. Příklad

$$3^{3x-2} = 5^x$$

$$\log_3 3^{3x-2} = \log_3 5^x$$

$$(3x-2)\log_3 3 = x\log_3 5$$

$$(3x-2) \cdot 1 = x\log_3 5$$

$$3x - x\log_3 5 = 2$$

$$x(3 - \log_3 5) = 2$$

$$x = \frac{2}{3 - \log_3 5}$$

Zkouška:

$$\log_3 L = 3x - 2 = \frac{6}{3 - \log_3 5} - 2$$

$$\log_3 L = \frac{6 - 6 + 2\log_3 5}{3 - \log_3 5}$$

$$\log_3 L = \frac{2\log_3 5}{3 - \log_3 5}$$

$$\log_3 P = x\log_3 5$$

$$\log_3 P = \frac{2}{3 - \log_3 5} \cdot \log_3 5$$

$$\log_3 L = \log_3 P \Rightarrow L = P$$

8. Příklad:

$$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$

$$3^{x+4} + 3^{x+2} = 4^{x+3} - 4^x$$

$$3^x(3^4 + 3^2) = 4^x(4^3 - 1)$$

$$90 \cdot 3^x = 63 \cdot 4^x$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{63}{90}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{7}{10}$$

$$x(\log 3 - \log 4) = \log 7 - \log 10$$

$$x = \frac{\log 7 - 1}{\log 3 - \log 4}$$

9. Příklad:

$$9^{2x} - 12 \cdot 9^x + 27 = 0$$

$$\text{subst. } 9^x = y$$

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

$$(y-3)(y-9) = 0$$

$$y_1 = 3; y_2 = 9$$

$$\text{ze subst. } 9^{x_1} = y_1 \Rightarrow 9^{x_1} = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ze subst. } 9^{x_2} = y_2 \Rightarrow 9^{x_2} = 9 \Rightarrow x_2 = 1$$

(chybějící zkoušky zde ponecháme čtenáři jako cvičení).

Logaritmické rovnice: jsou rovnice, v nichž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Nejjednodušší logaritmickou rovnicí je rovnice $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, která má řešení $x = a^b$. Další rovnice řešíme obvykle úpravou na tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, a pak řešíme tzv. delogaritmováním, tj. úpravou na tvar $f(x) = g(x)$. Často lze vhodnou substitucí převést logaritmickou rovnici na rovnici algebraickou. Pozor! Ani delogaritmování rovnice není ekvivalentní úpravou. Součástí tohoto řešení je tedy zkouška.

Příklad 11:

$$2 \log(x-2) = \log(14-x)$$

$$\log(x-2)^2 = \log(14-x)$$

$$(x-2)^2 = 14-x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 14 - x$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

Zkouška

$$L(5) = 2 \log(5-2) = 2 \log 3 = \log 3^2 = \log 9$$

$$P(5) = \log(14-5) = \log 9$$

$$L(5) = P(5)$$

$$L(-2) = 2 \log(-2-2) = 2 \log(-4)$$

$$L(-2) \text{ není definována}$$

$$x_2 = -2 \text{ není kořenem}$$

$$\text{množina řešení } \boxed{K = \{5\}}$$

Příklad 12:

$$\log(x^{\log x}) = 1$$

$$\log x \cdot \log x = 1$$

$$\log^2 x = 1$$

$$\log x = \pm 1$$

$$x_1 = 10; x_2 = 10^{-1}$$

Zkouška

$$L(10) = \log(10^{\log 10}) = \log 10 = 1$$

$$P(10) = 1$$

$$L(10) = P(10)$$

$$L(10^{-1}) = \log[(10^{-1})^{\log 10^{-1}}] = \log(10^{-1})^{-1} = \log 10 = 1$$

$$P(10^{-1}) = 1$$

$$L(10^{-1}) = P(10^{-1})$$

$$\text{množina řešení } \boxed{K = \{10; -10\}}$$

Příklad 13:

$$(\log x)^{\log x} = 1$$

$$\log x \cdot \log(\log x) = \log 1$$

$$\log x \cdot \log(\log x) = 0$$

$$\log x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\log(\log x_2) = 0$$

$$\log x_2 = 1$$

$$x_2 = 10$$

Zkouška

$$L(1) = (\log 1)^{\log 1} = 0^0$$

$$L(1) \text{ není definována}$$

$$x_1 = 1 \text{ není kořenem}$$

$$L(10) = (\log 10)^{\log 10} = 1^1 = 1$$

$$P(1) = 1$$

$$L(10) = P(10)$$

$$\text{množina řešení } \boxed{K = \{10\}}$$

Příklad 14:

$$\begin{aligned}
x^{\log x} + 10x^{-\log x} &= 11 / \cdot x^{\log x} \\
x^{2 \log x} + 10x^0 &= 11x^{\log x} \\
x^{2 \log x} - 11x^{\log x} + 10 &= 0 \\
\text{subst } x^{\log x} &= y \\
y^2 - 11y + 10 &= 0 \\
y_1 = 1; y_2 = 10 \\
\hline
\text{subst } x_1^{\log x_1} &= 1 \\
\log x_1 \cdot \log x_1 &= \log 1 \\
\log x_1 &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
\hline
\text{subst } x_2^{\log x_2} &= 10 \\
\log x_2 \cdot \log x_2 &= \log 10 \\
\log^2 x_2 &= 1 \\
\log x_2 &= \pm 1 \\
\hline
x_2 = 10; x_3 = 10^{-1}
\end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned}
L(1) &= 1^{\log 1} + 10 \cdot 1^{-\log 1} = 1^0 + 10 \cdot 1^0 = 11 \\
P(1) &= 11 \\
L(1) &= P(1) \\
L(10) &= 10^{\log 10} + 10 \cdot 10^{-\log 10} = 10^1 + 10 \cdot 10^{-1} = 11 \\
P(10) &= 11 \\
L(10) &= P(10) \\
L(10^{-1}) &= (10^{-1})^{\log 10^{-1}} + 10 \cdot (10^{-1})^{-\log 10^{-1}} \\
L(10^{-1}) &= 10^{(-1) \cdot (-1)} + 10 \cdot 10^{(-1) \cdot (+1)} = 10 + 1 = 11 \\
P(10^{-1}) &= 11 \\
L(10^{-1}) &= P(10^{-1}) \\
\text{množina řešení } &\boxed{K = \{1; 10; 10^{-1}\}}
\end{aligned}$$

Neřešené úlohy:

Vypočtete:

- | | | | |
|------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1) $\log_2 16$ | 5) $\log_4 16^2$ | 9) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8}$ | 13) $\log_1 \frac{1}{16}$ |
| 2) $\log_5 125$ | 6) $\log_{16} 16^2$ | 10) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$ | 14) $\log_{-2} \frac{1}{8}$ |
| 3) $\log_2 1024$ | 7) $\log_{256} 16^2$ | 11) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ | 15) $\log \log \frac{1}{10}$ |
| 4) $\log_2 16^2$ | 8) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ | 12) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$ | 16) $\log \left(-\log \frac{1}{10} \right)$ |

Řešte rovnice:

- | | |
|--|---|
| 17) $25^x = 625^2$ | 29) $\log_2 x = -2$ |
| 18) $8 \cdot 2^{2-x} = 16^{-3}$ | 30) $\log_x 16 = 4$ |
| 19) $9^{x-1} \cdot 3^{2x-1} = 27$ | 31) $\log_2 x^2 = 2$ |
| 20) $\sqrt{2^x} - \sqrt{12^{x-2}} = \sqrt{3^{x-2}}$ | 32) $\log_x x^2 = 2$ |
| 21) $2^{x-1} \sqrt{729} = 2^{x+1} \sqrt{81^2}$ | 33) $2 \log x = 3 - \log 5$ |
| 22) $\left(1 - \frac{5}{9} \right)^{\frac{2}{3-2x}} = \left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{x-5}}$ | 34) $2 \log_5 x = 4 - \log_5 \frac{x}{25}$ |
| 23) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ | 35) $\log(3x^2 + 1) - \log(3 + x) = \log(3x + 2)$ |

$$24) x^{\sqrt[n]{x}} = (\sqrt[n]{x})^x$$

$$36) \frac{\log(x^2 + 7)}{\log(x + 7)} = 2$$

$$25) 3 \cdot 4^x + 9^{x+2} \cdot 3^{-1} = 6 \cdot 4^{x+1} - 9^{x+1} \cdot 2^{-1}$$

$$37) 3^{1+\log x} = 81$$

$$26) \left[2 \cdot (2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$$

$$38) \log(3x-1) - \log(3x+1) = \log 16$$

$$27) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$$

$$39) \log_x 4 + \log_x 2 = 1$$

$$28) 5^x \cdot 4^{x-1} - 4^x \cdot 5^{1-x} = \frac{61}{20}$$

$$40) 3e^{\ln x} - 2e^{\ln 2x} + 4e = 0$$

Výsledky:

1) 4 2) 3 3) 10 4) 8 5) 4 6) 2 7) 1 8) 1 9) 1 10) 4 11) -2 12) 2

13) není definován 14) není definován 15) není definován 16) 0 17) 4 18) 17

19) 1.5 20) 2 21) 3.5 22) -0.25 23) 35 24) 1; $n \cdot \sqrt[n-1]{n}$ 25) -0.5 26) 9 27) -1.7

28) 2 29) 0.25 30) 2 31) 2 32) $x > 0; x \neq 1$ 33) $\sqrt{200}$ 34) 25 35) 1 36) -3

37) 1000 38) nemá řešení 39) 1 40) 4e

5.7 Oblouková míra a orientovaný úhel

V kpt. 1.4 jsme stručně uvedli stupňovou míru úhlů, která však mnohdy nevyhovuje. Uvedeme tedy i tzv. **míru obloukovou**. Její jednotkou je jeden radián (rad). Před jeho definicí je však třeba uvést tzv. středový úhel:

Úhel $\omega = \sphericalangle ASB$, jehož vrcholem je střed kružnice a ramena procházejí krajními body oblouku AB , nazýváme **středový úhel** příslušný tomuto oblouku.

Úhel má velikost jednoho radiánu právě tehdy, když je shodný se středovým úhlem kružnice, jejíž poloměr je roven délce příslušného oblouku.

Má-li kružnice poloměr $r = 1$ (tzv. jednotková kružnice), pak velikost úhlu v radiánech je číselně přímo rovna délce příslušného oblouku. Jednotka radián je ve „fyzikálním“ slova smyslu jednotkou bezrozměrnou (vzniká jako „podíl dvou délek“). V matematice se většinou vynechává a velikost úhlu se tak udává jen reálným číslem. Také my budeme tuto jednotku výslovně zapisovat pouze výjimečně. Budeme-li chtít zdůraznit, že velikost úhlu α je zadána v radiánech, budeme psát $\text{arc } \alpha$ („arcus alfa“).

Převod stupňů na radiány a naopak: Uvažujme jednotkovou kružnici. Ta má délku $l = 2\pi$. Plný úhel má tedy velikost 2π radiánů. Zároveň je zřejmé, že tento plný úhel je součtem čtyř pravých úhlů a ve stupňové míře má tedy velikost $\alpha^0 = 4 \cdot 90^0 = 360^0$. Je tedy $2\pi \text{ rad} = 360^0$. Velikost úhlu v radiánech (označme $\text{arc } \alpha$) je přímo úměrná velikosti úhlu ve stupních (označme α^0):

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \begin{array}{ccc} 360^0 & \dots\dots\dots & 2\pi \\ \alpha^0 & \dots\dots\dots & \text{arc } \alpha \end{array} & \uparrow \\ & & & \end{array}$$

$$\frac{\alpha^0}{360^0} = \frac{\text{arc } \alpha}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha^0 = \frac{\text{arc } \alpha}{2\pi} \cdot 360^0 \Rightarrow \boxed{\alpha^0 = \frac{180^0 \cdot \text{arc } \alpha}{\pi}} \\ \Rightarrow \text{arc } \alpha = \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{\text{arc } \alpha = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}} \end{array} \right.$$

Příklady:

$$1) \operatorname{arc} 1^\circ = \frac{\pi \cdot 1^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{180} \approx 0,017...rad \quad 2) \operatorname{arc} 18^\circ = \frac{\pi \cdot 18^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{10} \approx 0,314...rad$$

$$3) \operatorname{arc} 142^\circ 30' = \operatorname{arc} 142,50^\circ = \frac{\pi \cdot 142,50^\circ}{180^\circ} \approx 2,487...rad$$

$$4) 1 \operatorname{rad} = \frac{180^\circ \cdot 1}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,295\ 78^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

Velikosti některých úhlů se ve výpočtech vyskytují velmi často, proto je dobré si je rychle uvědomit:

stupně	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Orientovaný úhel: Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. První z polopřímek je počáteční rameno, druhá koncové rameno, společný počátek polopřímek pak vrchol orientovaného úhlu. Orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ budeme značit $\widehat{AVB}$.

Vzhledem k tomu, že rozlišujeme počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu, je $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$.

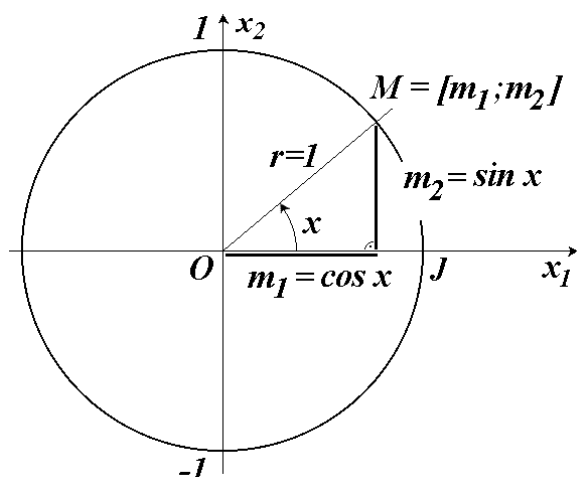
Velikost orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ nazýváme každé reálné číslo $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (v obloukové míře) popř. $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$; $k \in \mathbb{Z}$ (ve stupňové míře), kde α (popř. α°) určíme takto:

a) Je-li $\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{VB}$, je $\alpha = 0$ (popř. $\alpha^\circ = 0^\circ$)

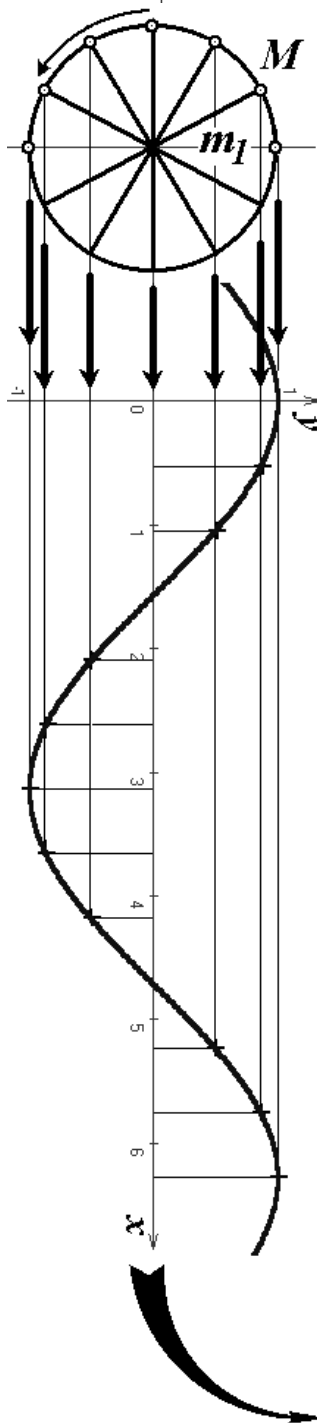
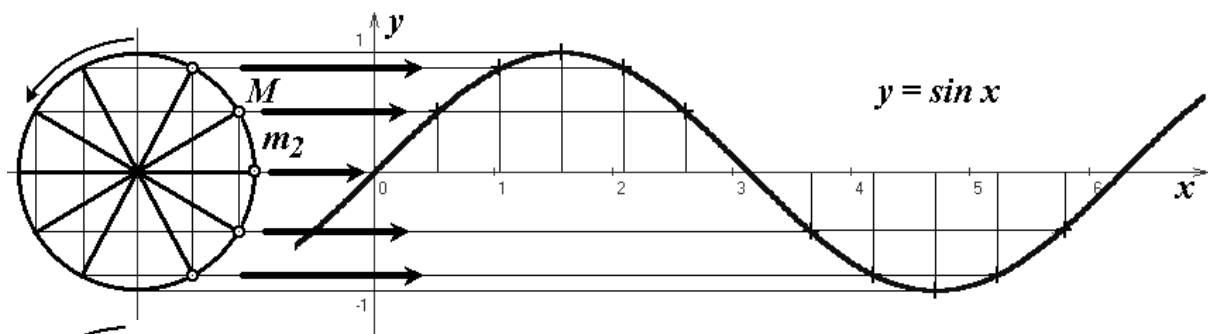
b) Je-li $\overrightarrow{VA} \neq \overrightarrow{VB}$, je α (α°) velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otáčením počátečního ramene $\overrightarrow{VA}$ do polohy koncového ramene $\overrightarrow{VB}$, a to **proti směru chodu hodinových ručiček** v obloukové (ve stupňové) míře. Směr proti směru chodu hodinových ručiček považujeme za **kladný**.

Velikost α (α°) nazýváme základní velikostí orientovaného úhlu. Další velikosti $\alpha + 2k\pi$ ($\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$) si můžeme představit jako polohu koncového ramene $\overrightarrow{VB}$ po k otáčkách.

5.8 Goniometrické funkce



Uvažujme kartézskou souřadnou soustavu $\langle O; x_1; x_2 \rangle$ s počátkem O . Označme J obraz jedničky na ose x_1 . Dále libovolný orientovaný úhel s vrcholem O , počátečním ramenem $\overrightarrow{OJ}$ a velikostí $x \in \mathbb{R}$ (v obloukové míře). Sestrojme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici o poloměru $r=1$) se středem v bodě O . Označme $M = [m_1; m_2]$ průsečík této kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pak můžeme definovat funkci



sinus: $\sin x = m_2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$; $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$,
kosinus: $\cos x = m_1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$; $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

Dále definujeme

tangens: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

pro každé $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$; $H(f) = \mathbb{R}$,

kotangens: $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

pro každé $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$; $H(f) = \mathbb{R}$.

Přímo z definice pro každé $x \in \mathbb{R}$ plyne:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1},$$

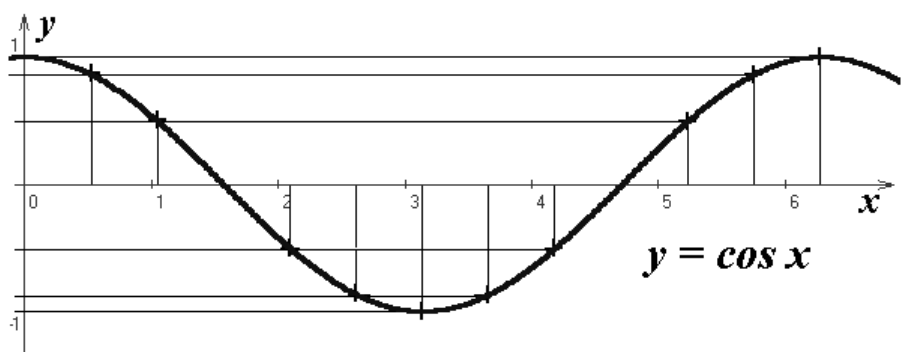
a tedy

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x},$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

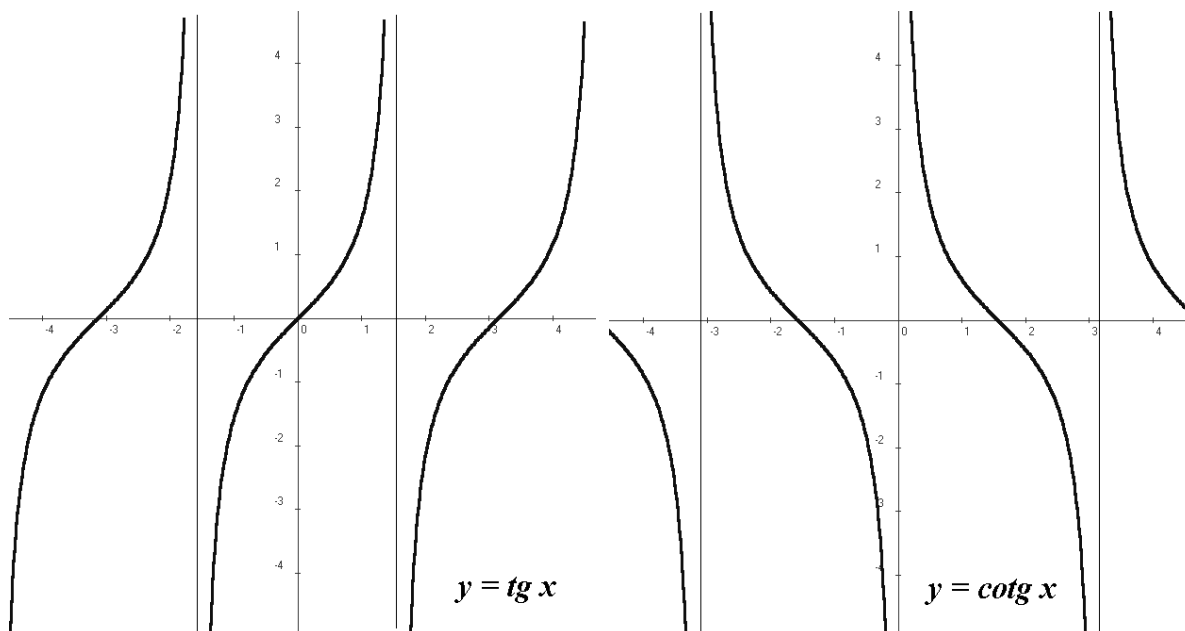
Znaménka hodnot goniometrických funkcí

kvadrant	I	II	III	IV
interval	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-



Důležité hodnoty goniometrických funkcí

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>ndef</i>	0	<i>ndef</i>	0
$\operatorname{cotg} x$	<i>ndef</i>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	<i>ndef</i>	0	<i>ndef</i>



Dále je

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ pro každé } x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkce	sinus je lichá	$\sin x = -\sin(-x)$
	kosinus sudá	$\cos x = \cos(-x)$
	tangens lichá	$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$
	kotangens lichá	$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(-x)$

V zápisu dalších vlastností budeme potřebovat dvě hodnoty nezávisle proměnné. Abychom nemuseli používat indexy (např. při označení $x_1; x_2$) nebo aby nedocházelo k záměně se

závisle proměnnou (např. při značení x, y), budeme argumenty goniometrických funkcí označovat řeckými písmeny ($\alpha, \beta, \dots$) tak, jak je to obvyklé v řadě aplikací.

Odvodíme některé další vlastnosti, které známe ze střední školy: V kapitole 7.2 zopakujeme, že pro skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$; $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ platí: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Speciálně pro vektory o souřadnicích $\mathbf{u} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$; $\mathbf{v} = (\cos \beta; \sin \beta)$, které mají jednotkovou velikost a které svírají úhel $\alpha - \beta$, pak dostáváme $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$,

$$\text{tedy } \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

Dosadíme-li za β hodnotu $-\beta$, máme

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta).$$

Protože $\cos(-\beta) = \cos \beta$; $\sin(-\beta) = -\sin \beta$, máme

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Dále využijeme vlastnosti $\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ pro $x = \alpha + \beta$:

$$\sin(\alpha + \beta) = -\cos\left[(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2}\right] = -\cos\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right] = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos \beta + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta$$

Protože však $-\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$ a $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$, je

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Dosadíme-li za β hodnotu $-\beta$, máme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta),$$

$$\text{tedy } \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

Sečteme vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\sin(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

a dosadíme $\frac{\alpha + \beta}{2}$ za α a $\frac{\alpha - \beta}{2}$ za β :

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\text{tedy } \boxed{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Podobně odečtením těchto vzorců dostaneme

$$\boxed{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Ze vzorců pro $\cos(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha - \beta)$ podobně dostaneme:

$$\boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}};$$

$$\boxed{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Položíme-li $\alpha = \beta$, dostáváme ze vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha,$$

tedy $\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$.

Podobně ze vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Dosadíme-li do vzorce pro $\cos 2\alpha$ za α hodnotu $\frac{\alpha}{2}$, dostaneme

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \alpha = \underbrace{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}_{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

tedy $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}.$

Konečně $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}.$

Shrňme tedy nejdůležitější vztahy mezi funkcemi sinus a kosinus:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}}$$

Příklady: Upravme výrazy

1) $\cos^2 v \sin^2(-v) - 2 \sin(-v) \cos(-v) + 1 = \cos^2 v \sin^2 v - 2 \sin v \cos v + 1 =$
 $= \cos^2 v (-\sin v)(-\sin v) + 2 \sin v \cos v + 1 = \cos^2 v \sin^2 v + 2 \sin v \cos v + 1 = (\sin v \cos v + 1)^2$

2) $(1 + \operatorname{tg}^2 z) \cos^2 z = \left(1 + \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}\right) \cos^2 z = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} \cos^2 z = \frac{1 \cdot \cos^2 z}{\cos^2 z} = 1$

3) $\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} + 1 = \sqrt{\frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}} + 1 = \sqrt{\frac{2}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}}} + 1 = \sqrt{2 \sin x \cos x} + 1 =$
 $= \sqrt{2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|$

$$4) (\sin b + \cos b)^2 + (\sin b - \cos b)^2 = \\ = \sin^2 b + 2 \sin b \cos b + \cos^2 b + \sin^2 b - 2 \sin b \cos b + \cos^2 b = 2 \sin^2 b + 2 \cos^2 b = 2$$

$$5) \frac{\sin d}{1 - \cos d} + \frac{\sin d}{1 + \cos d} = \frac{\sin d(1 + \cos d) + \sin d(1 - \cos d)}{(1 - \cos d)(1 + \cos d)} = \\ = \frac{\sin d(1 + \cos d + 1 - \cos d)}{1 - \cos^2 d} = \frac{2 \sin d}{\sin^2 d} = \frac{2}{\sin d}$$

$$6) \frac{\sin 2v}{1 + \cos 2v} = \frac{2 \sin v \cos v}{\sin^2 v + \cos^2 v + \cos^2 v - \sin^2 v} = \frac{2 \sin v \cos v}{2 \cos^2 v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tg} v$$

$$7) \frac{\sin z + \sin 2z}{1 + \cos z + \cos 2z} = \frac{\sin z + 2 \sin z \cos z}{\sin^2 z + \cos^2 z + \cos^2 z - \sin^2 z} = \frac{\sin z(1 + 2 \cos z)}{\cos z + 2 \cos^2 z} = \\ = \frac{\sin z(1 + 2 \cos z)}{\cos z(1 + 2 \cos z)} = \frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tg} z$$

$$8) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{4}}}{\frac{2 \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \\ \text{lépe: subst } \frac{\alpha}{2} = x: \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

$$9) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{-2 \sin \alpha \sin \beta} = -\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$$

$$\text{Nebo: subst. } \alpha + \beta = x; \alpha - \beta = y: \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} =$$

$$= \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{-\sin \alpha \sin \beta} = -\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$$

$$10) \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \frac{(\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos x) + (\cos 5x + \cos 3x)} = \\ = \frac{2 \sin \left(\frac{7x+x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-x}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{5x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{5x-3x}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{7x+x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-x}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{5x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{5x-3x}{2} \right)} = \\ = \frac{\sin 4x \cos 3x + \sin 4x \cos x}{\cos 4x \cos 3x + \cos 4x \cos x} = \frac{\sin 4x (\cos 3x + \cos x)}{\cos 4x (\cos 3x + \cos x)} = \operatorname{tg} 4x$$

Bez výpočtu t určíme hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, víme-li, že $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$:

$$11) \sin t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$12) \operatorname{tg} t = 0,8: \text{ Je zřejmé } \operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}. \text{ Pripomeňme, že } t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Dále je tedy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= 0,8 & \cos t &= -\sqrt{1 - \sin^2 t} \\ \frac{\sin t}{\cos t} &= 0,8 & \cos t &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{4\sqrt{41}}{41}\right)^2} \\ \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} &= 0,8 & \cos t &= -\sqrt{1 - \frac{16 \cdot 41}{41^2}} \\ \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} &= 0,64 & \cos t &= -\sqrt{1 - \frac{16}{41}} \\ \sin^2 t &= 0,64 - 0,64 \sin^2 t & \cos t &= -\sqrt{\frac{41 - 16}{41}} \\ 1,64 \sin^2 t &= 0,64 & \cos t &= -\sqrt{\frac{25}{41}} \\ \sin^2 t &= \frac{0,64}{1,64} & \cos t &= -\frac{5}{\sqrt{41}} \\ \sin^2 t &= \frac{16}{41} & \cos t &= -\frac{5\sqrt{41}}{41} \\ \sin t &= -\sqrt{\frac{16}{41}} = -\frac{4}{\sqrt{41}} = -\frac{4\sqrt{41}}{41} \end{aligned}$$

Neřešené úlohy:

Upravte:

$$1) \cos(-u) \cos u - \sin u \sin(-u)$$

$$2) \frac{\sin^2 p}{1 + \cos p}$$

$$3) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$$

$$4) \sin a - \sin a \cos^2 a$$

$$5) \frac{1}{1 - \sin c} + \frac{1}{1 + \sin c}$$

$$6) \frac{\sin^2 f - \sin^2 g}{\cos^2 f - \cos^2 g}$$

$$7) \frac{\cos 2u}{\sin u + \cos u}$$

$$8) \frac{1 + \cos 2t}{1 - \sin 2t}$$

$$9) \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4}} \quad (\text{návod: subst. } \frac{\alpha}{2} = 2x)$$

$$10) \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$$

$$11) \frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x}$$

$$12) \frac{\cos(\pi + z) \sin \frac{3\pi}{2} + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \sin \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) \cos \pi - \sin \frac{3\pi}{2} \sin(\pi + z)}$$

13) Bez výpočtu r určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, víte-li, že $r \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$: a) $\sin r = -0.4$ b) $\cos r = 0.25$ c) $\operatorname{tg} r = -1.2$ d) $\operatorname{cotg} r = -\frac{8}{15}$

Výsledky:

$$1) 1 \quad 2) 1 - \cos p \quad 3) 1 \quad 4) \sin^3 a \quad 5) \frac{2}{\cos^2 c} \quad 6) -1 \quad 7) \cos u - \sin u \quad 8) \operatorname{cotg}^2 t \quad 9)$$

$$\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \quad 10) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \quad 11) \operatorname{tg} 5x \quad 12) 1 \quad 13) \text{ a) } \cos r = \frac{\sqrt{21}}{5}; \operatorname{tg} r = -\frac{2\sqrt{21}}{21};$$

$$\operatorname{cotg} r = -\frac{\sqrt{21}}{2} \quad \text{b) } \sin r = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \operatorname{tg} r = -\sqrt{15}; \operatorname{cotg} r = -\frac{\sqrt{15}}{15} \quad \text{c) } \sin r = -\frac{6\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos r = -\frac{5\sqrt{61}}{61}; \operatorname{cotg} r = -\frac{5}{6} \quad \text{d) } \sin r = -\frac{15}{17}; \cos r = \frac{8}{17}; \operatorname{tg} r = -\frac{15}{8}$$

5.9. Goniometrické rovnice

Goniometrická rovnice je každá rovnice, v níž se neznámá vyskytuje v goniometrických výrazech. Nejjednodušší jsou rovnice tvaru $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{cotg} x = a$. Perioda sinu a kosinu je 2π . Určíme tedy nejdříve všechna řešení na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ a ke každému řešení připojíme periodu $2k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Perioda funkcí tangens a kotangens je π . U těchto funkcí určíme všechna řešení na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ a ke každému řešení připojíme periodu $k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

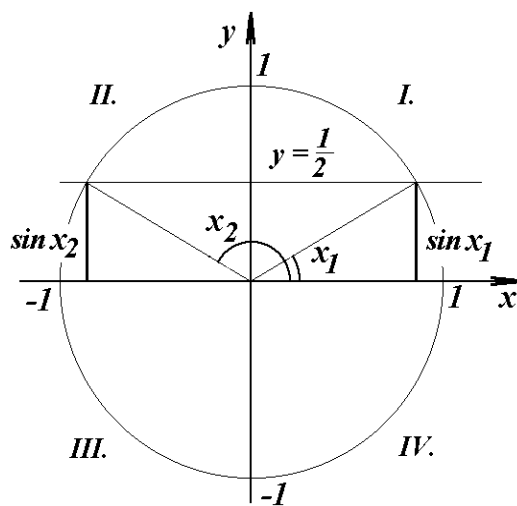
1. Příklad: Řešme goniometrickou rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$

Řešení: Určíme kořeny v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, a to buď pomocí jednotkové kružnice (viz připojený obrázek) nebo pomocí grafu funkce sinus. Funkce sinus je kladná v I. a II. kvadrantu, tj. $x_1 = \frac{\pi}{6}$;

$x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. K oběma řešením je třeba připojit periodu, tj.

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$



2. Příklad: Řešme goniometrickou rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Řešení: Opět určíme nejprve kořeny v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Hodnota funkce kosinus má být záporná. V tom případě je výhodné vyjít z řešení rovnice

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3},$$

které zakreslíme buď do jednotkové kružnice nebo do grafu kosinu. Funkce kosinus je záporná ve II. a III. kvadrantu,

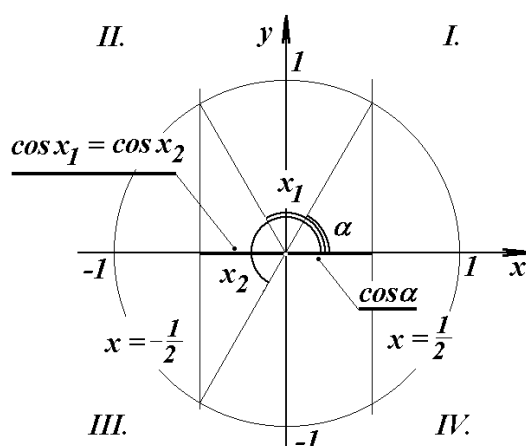
$$\text{tj. } x_1 = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{II. kvadrant})$$

$$\text{a } x_2 = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad (\text{III. kvadrant}).$$

K oběma řešením opět připojíme periodu, tj.

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$



Pozor! V přijímacích testech se občas objevují rovnice typu $\sin x = \frac{\pi}{2}$, resp. $\cos x = -\pi$ apod. Tyto rovnice studenti často zaměňují s rovnicemi $\sin \frac{\pi}{2} = x$, resp. $\cos(-\pi) = x$ a uvádějí řešení $x = 1$, resp. $x = -1$ (popř. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, resp. $x = -\pi + 2k\pi$). Obor hodnot funkce sinus i kosinus je $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$ a $\frac{\pi}{2} \notin \langle -1; 1 \rangle$; $-\pi \notin \langle -1; 1 \rangle$. Rovnice $\sin x = \frac{\pi}{2}$; $\cos x = -\pi$ proto **nemají řešení**.

V rovnicích typu $\sin f(x) = a$; $\cos f(x) = a$; $\operatorname{tg} f(x) = a$; $\operatorname{cotg} f(x) = a$ zavádíme substituci $f(x) = z$, čímž tyto rovnice převedeme na předchozí případ.

3. Příklad: Řešme rovnici $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3}$.

Řešení: Zavedeme substituci $4x - \frac{\pi}{5} = z$ a řešíme nejdříve rovnici $\operatorname{tg} z = -\sqrt{3}$. Je-li $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, pak v I. kvadrantu je $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Funkce tangens má periodu π a je záporná ve druhém kvadrantu. „Převodem“ hodnoty $\alpha = \frac{\pi}{3}$ do II. kvadrantu po vzoru předchozích příkladů a připojením periody je $z = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. V použité substituci tedy je

$$\begin{aligned} 4x - \frac{\pi}{5} &= \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ 4x &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{5} + k\pi \\ 4x &= \frac{13\pi}{15} + k\pi \\ x &= \frac{13\pi}{60} + \frac{k\pi}{4}. \end{aligned}$$

Složitější rovnice lze často vhodnou substitucí převést na rovnice algebraické. Pokud se v rovnici vyskytuje více goniometrických funkcí, převádíme je na funkci jedinou.

4. Příklad: Řešme rovnici

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$

Řešení:

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin^2 x - 1 + \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{subst. } \sin x = y$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y_1 = -1; y_2 = \frac{1}{2}.$$

Návratem k použité substituci se řešení rozpadne na dva případy:

$$\sin x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\sin x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

5. Příklad: Řešme rovnici $\frac{4\sin^2 x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 2$

Řešení:

$$\frac{4\sin^2 x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 2$$

$$\frac{4\sin^2 x}{2\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

$$\frac{2\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

$$\frac{2\sin^2 x \cos x - \sin^3 x}{\sin x \cos^2 x} = 1$$

$$2\sin^2 x \cos x - \sin^3 x = \sin x \cos^2 x$$

$$2\sin x \cos x - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Neřešené úlohy:

Řešte rovnice:

1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

3) $\cot g x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

5) $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

6) $\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{15}\right) = \cos \frac{2\pi}{5}$

7) $\frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$

8) $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$

9) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1}{3}$

10) $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

11) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

12) $\cot g^2 x + 4\cos^2 x - 3 = 0$

13) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$

14) $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$

Výsledky:

1) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ 2) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ 3) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 4) $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

5) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 6) $x_1 = \frac{3\pi}{10} + 3k\pi; x_2 = \frac{\pi}{2} + 3k\pi$ 7) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;$

$x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ 8) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 9) $x_1 = \frac{1}{3} + 2k\pi; x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ 10) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \mathbf{11)} \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \mathbf{12)} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \mathbf{13)} \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

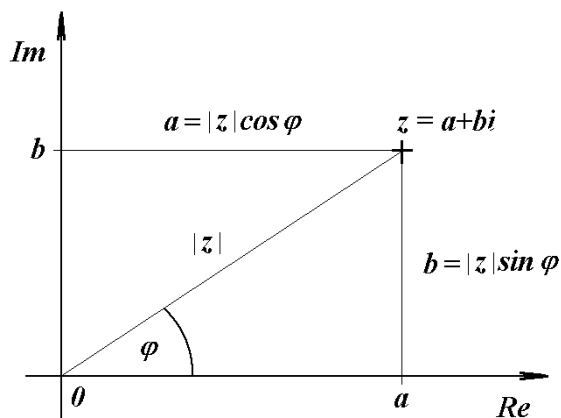
$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; x_3 = k\pi \quad \mathbf{14)} \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

5.10 Goniometrický tvar komplexních čísel

V kpt. 2.5 jsme komplexní čísla zapisovali v tzv. algebraickém tvaru, tj. ve tvaru $z = a + bi$. Označme nyní φ orientovaný úhel v Gaussově rovině, jehož počáteční rameno tvoří kladná poloosa Re, koncové rameno pak spojnice obrazu čísla s počátkem. Pak je $a = |z| \cos \varphi$; $b = |z| \sin \varphi$ a číslo z můžeme psát ve tvaru

$$z = a + bi = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi,$$

tj.
$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Tomuto zápisu říkáme **goniometrický tvar komplexního čísla**. Argument φ nazýváme **amplitudou komplexního čísla z** .

1. Příklad: Převedme na goniometrický tvar: **a)** $z = \sqrt{3} + i$ **b)** $z = \sqrt{3} - i$ **c)** $z = 1$ **d)** $z = -i$

a) $z = \sqrt{3} + i$:

$$\left. \begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \\ a &= |z| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b &= |z| \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

b) $z = \sqrt{3} - i$:

$$\left. \begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \\ \cos \varphi &= \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{b}{|z|} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

c) $z = 1$: $|z| = 1$;

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{|z|} = 1 \\ \sin \varphi &= \frac{b}{|z|} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i \sin 0$$

d) $z = -i$: $|z| = 1$;

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{|z|} = 0 \\ \sin \varphi &= \frac{b}{|z|} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

2. Příklad: Převedme na algebraický tvar: **a)** $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

b) $z = 3 \cdot (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

$$\text{a) } z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 - 2i$$

$$\text{b) } z = 3 \cdot (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Součin dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned} |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= \boxed{|z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]}. \end{aligned}$$

Podíl dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \boxed{\frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]}. \end{aligned}$$

Speciálním případem součinu dvou komplexních čísel je druhá mocnina komplexního čísla:

$$z^2 = \{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^2 = |z|^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Součin dvou komplexních čísel je možno zobecnit na součin n činitelů, podobně druhou mocninu lze zobecnit na mocninu n -tou. Dostaneme tak tzv. **Moiverovu větu**:

$$\boxed{z^n = \{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}.$$

n -tá komplexní odmocnina: n -tou odmocninu z komplexního čísla $a \in \mathbb{C}$ budeme značit $(\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}}$, abychom ji odlišili od odmocniny z čísla reálného.

Pro každé $a \in \mathbb{C}$, $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; $n \in \mathbb{N}$ je $z = (\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}}$, kde $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, právě tehdy, když $z^n = a$, tedy:

$$|z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |a|[\cos(\alpha + 2k\pi) + i \sin(\alpha + 2k\pi)]$$

Tato dvě komplexní čísla jsou si rovna právě tehdy, rovnají-li se jejich absolutní hodnoty a amplitudy, tj.:

$$|z|^n = |a| \Rightarrow |z| = (\sqrt[n]{a})_{\mathbb{C}}; \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}; \quad k \in \mathbb{Z};$$

přičemž pro $k_2 = k_1 + n$ je

$$\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k_2\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(k_1 + n)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k_1\pi}{n}\right)$$

(totéž pro kosinus). Pro $k > n-1$ tedy dostáváme tatáž čísla, proto stačí uvažovat $k = 0, 1, \dots, n-1$.

$$\text{Tedy: } \boxed{\left(\sqrt[n]{|a|}(\cos \alpha + i \sin \alpha)\right)_\mathbb{C} = \sqrt[n]{|a|} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]; k = 0, 1, \dots, n-1}$$

n -tá komplexní odmocnina má tedy n hodnot. Absolutní hodnoty komplexních odmocnin z téhož komplexního čísla jsou si tedy rovny a amplitudy se postupně liší o $\frac{2\pi}{n}$. Je-li $n = 2$, jsou komplexnímui odmocninami dvě opačná komplexní čísla, pro $n > 2$ tvoří obrazy odmocnin v Gauusově rovině vrcholy pravidelného n -úhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $\sqrt[n]{|a|}$.

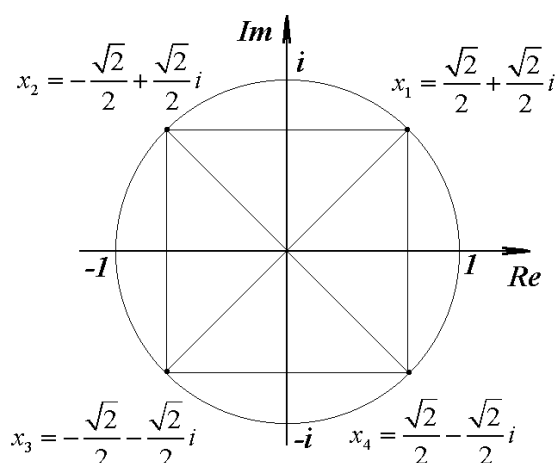
3. Příklad: Řešme rovnici $x^4 = -1$ v množině $\mathbb{C}$.

Řešení:

$$x = (\sqrt[4]{-1})_\mathbb{C} = (\sqrt[4]{1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)})_\mathbb{C} \Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right); k = 0, 1, 2, 3,$$

tedy:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} & x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_2 &= \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} & x_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_3 &= \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} & x_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_4 &= \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} & x_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{aligned}$$



Neřešené úlohy:

Převeďte na goniometrický tvar:

1) a) i b) $1 - i$ c) $-0,5 \cdot (1 + i\sqrt{3})$

Převeďte na algebraický tvar:

2) a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ b) $3 \cdot (\cos 136^\circ + i \sin 136^\circ)$ c) $4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

V oboru $\mathbb{C}$ řešte rovnice

3) $x^2 = i$ 4) $x^3 = -1$ 5) $x^2 = 7 - 24i$ 6) $x^6 = 64$.

Výsledky

1) a) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ b) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ c) $\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$ 2) a) $0.5 - 0.5i$

b) $-2.157 + 2.085i$ c) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 3) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

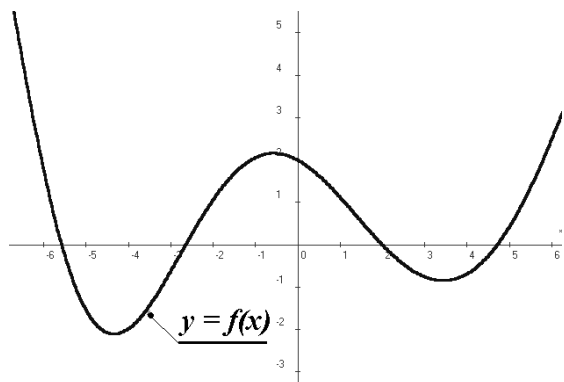
4) $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) $x_{1,2} = \pm(4 - 3i)$

6) $x_{1,2,3,4,5,6} = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}\right) \right]; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

5.11 Konstrukce grafů funkcí

Znalost práce s grafem funkce patří k základní výbavě budoucího strojího inženýra.

Uvažujme obecně funkci $y = f(x)$, jejíž graf je sestaven na připojeném obrázku (konkrétní funkční předpis v tuto chvíli není důležitý). V technických aplikacích je třeba funkční předpis často modifikovat několika málo úpravami a sestavovat grafy takto modifikovaných funkcí.



K nejčastějším úpravám patří:

- a) změna znaménka
- b) aplikace absolutní hodnoty
- c) přičtení konstanty
- d) násobení konstantou

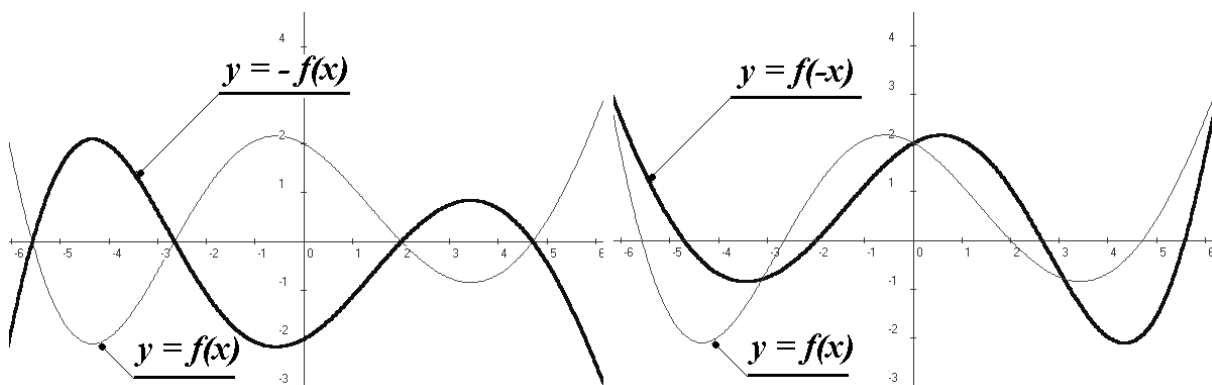
Všechny tyto modifikace lze aplikovat

- α) na funkci
- β) na argument funkce

a) změna znaménka

α) u funkce $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$: má za následek záměnu kladné a záporné poloosy y – graf funkce $-f(x)$ je souměrný s grafem funkce $f(x)$ podle osy x ,

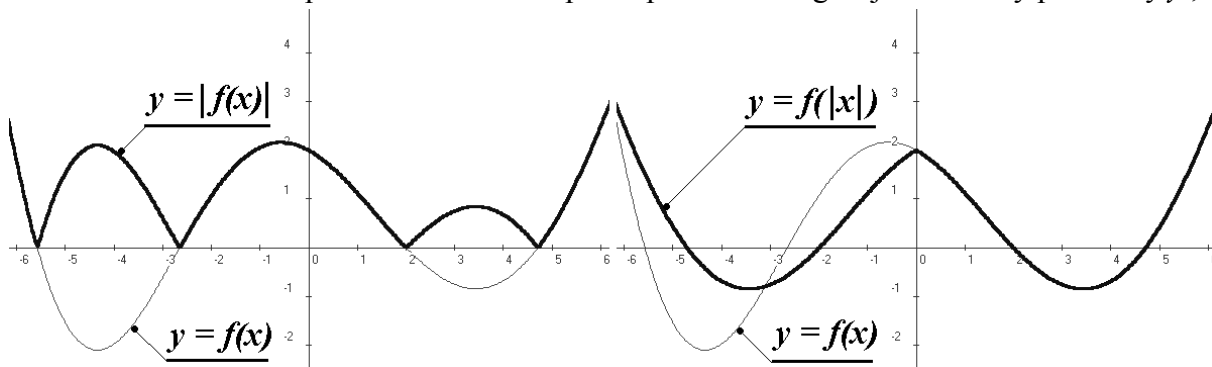
β) u argumentu funkce $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$: má za následek záměnu kladné a záporné poloosy x – graf funkce $f(-x)$ je souměrný s grafem funkce $f(x)$ podle osy y ,



b) aplikace absolutní hodnoty

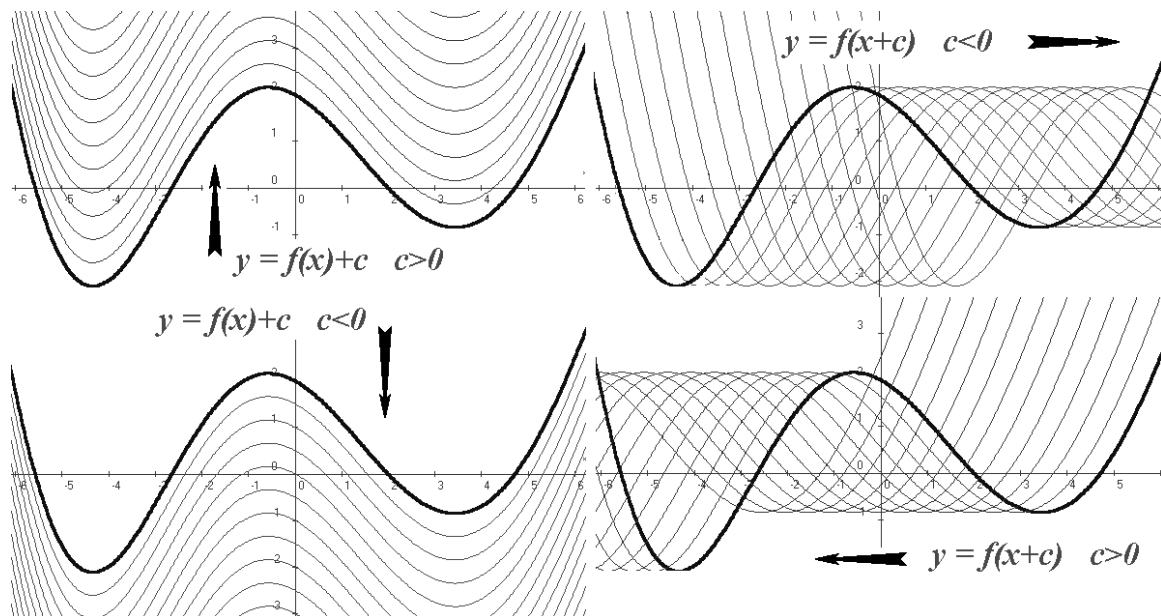
α) na funkci $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$: má za následek změnu znaménka záporných funkčních hodnot – v záporných hodnotách se graf funkce překlápí kolem osy x

β) na argumentu funkce $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$: má za následek „ztrátu“ informace o hodnotách původní funkce v záporné poloosě x – graf je souměrný podle osy y ,



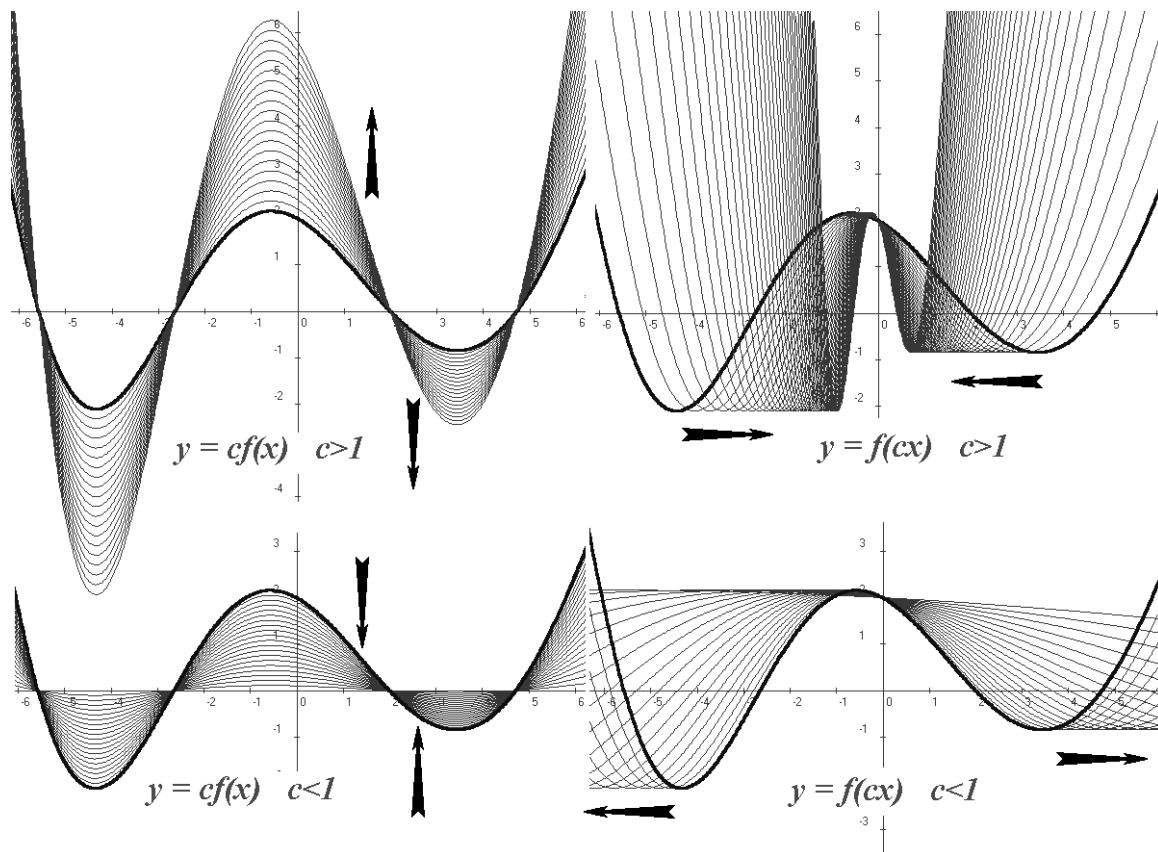
c) přičtení konstanty (posouvání grafu)

- α) k funkci $f(x) \rightarrow f(x) + c$: posouvá graf po ose y „souhlasně“ – pro $c > 0$ nahoru (ve směru kladných hodnot), pro $c < 0$ dolů (ve směru záporných hodnot),
 β) k argumentu $f(x) \rightarrow f(x + c)$: posouvá graf po ose x „nesouhlasně“ – pro $c < 0$ doprava (ve směru kladných hodnot), pro $c > 0$ doleva (ve směru záporných hodnot),

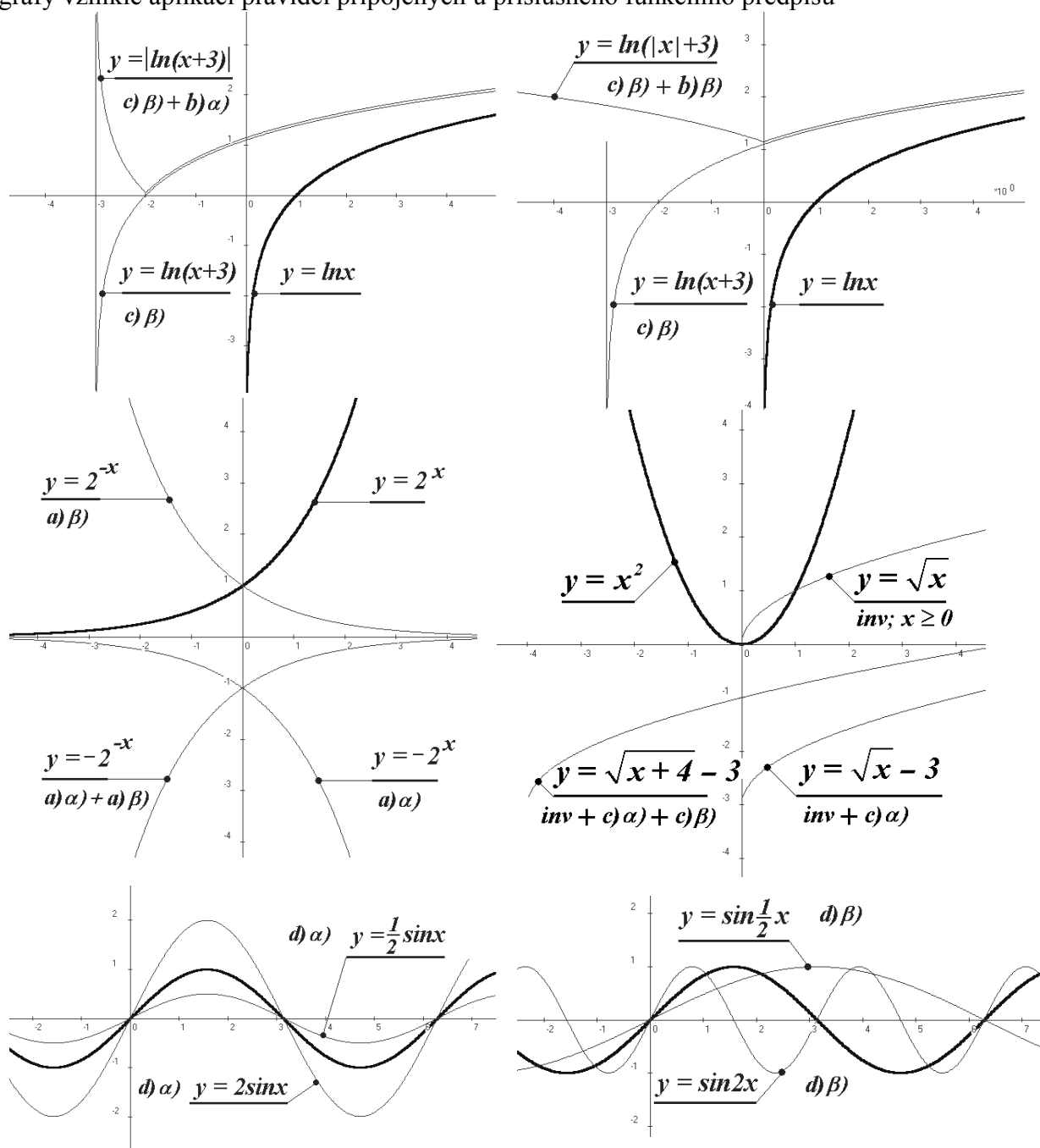


d) násobení nenulovou konstantou (prodlužování, resp. zkracování grafu)

- α) funkce $f(x) \rightarrow c \cdot f(x)$, $c > 0$: po ose y „souhlasně“ – pro $c > 1$ prodlužuje, pro $c < 1$ zkracuje,
 β) argumentu $f(x) \rightarrow f(c \cdot x)$, $c > 0$: po ose x „nesouhlasně“ – pro $c > 1$ zkracuje, pro $c < 1$ prodlužuje.



Příklady 1 – 6: V těchto příkladech je silnější křivkou sestrojen „základní“ graf, slabšími pak grafy vzniklé aplikací pravidel připojených u příslušného funkčního předpisu



(inv zde značí použití grafu inverzní funkce).

Příklad 7: Sestrojme graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$.

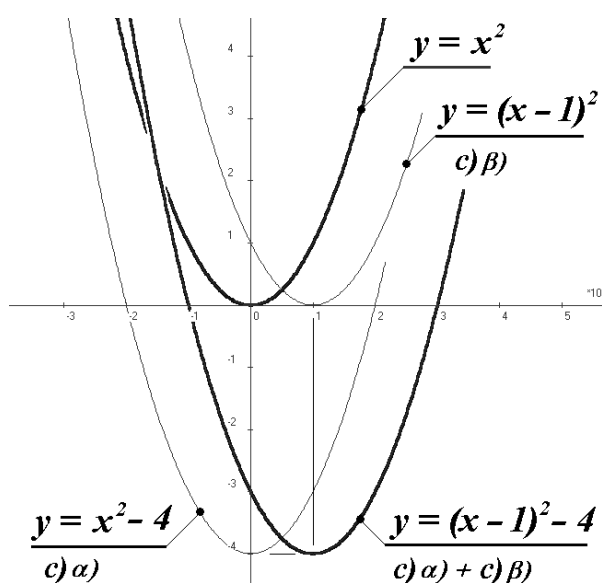
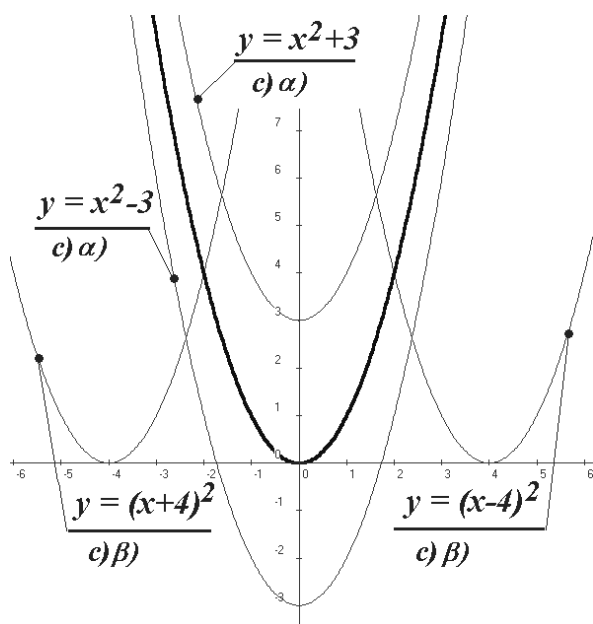
Řešení: „Základní“ křivkou bude parabola. Abychom mohli uplatnit výše uvedená pravidla, doplníme funkční předpis na čtverec:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = x^2 - 2x + 1 - 4$$

$$y = (x-1)^2 - 4$$

Nyní je zřejmé, že graf sestrojíme pomocí paraboly $y = x^2$ aplikací pravidel $c) \alpha)$; $c) \beta)$.



Poznámka: Dosadíme-li do zadaného funkčního předpisu $y=0$, dostaneme rovnici $x^2 - 2x - 3 = 0$. Jestliže ji vyřešíme, určíme body, ve kterých graf protíná osu x :

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 3.$$

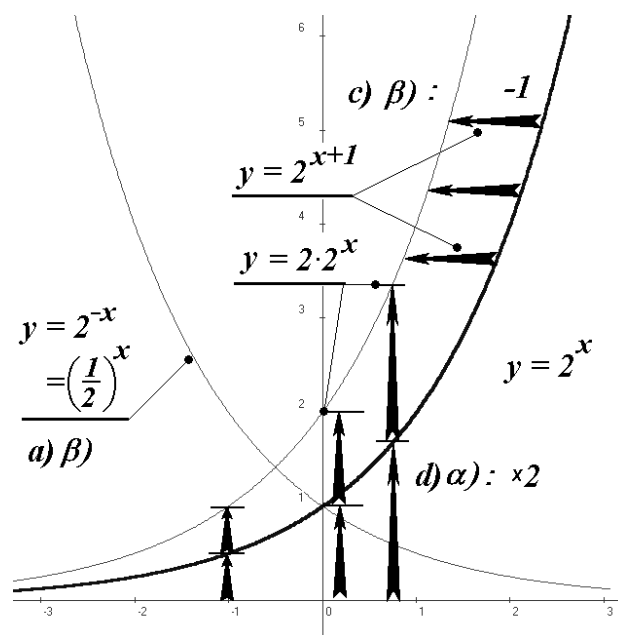
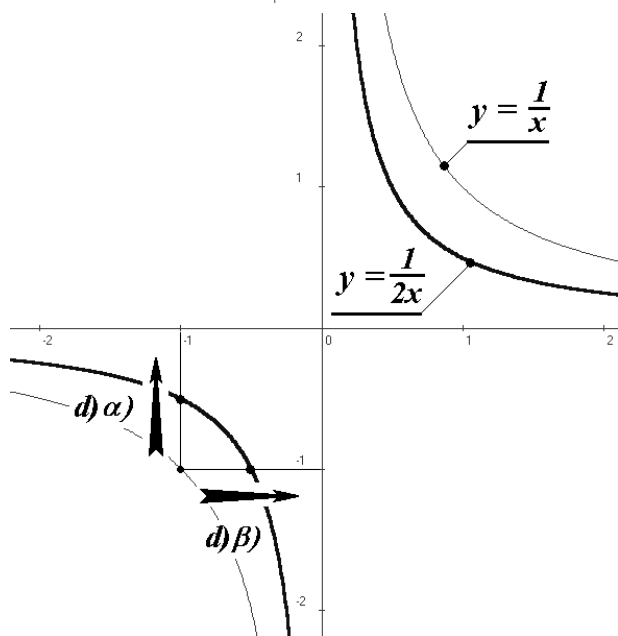
Tento výsledek skutečně odpovídá grafu sestrojeného vpravo nahoře.

Příklad 8: Sestrojme graf funkce $y = \frac{1}{2x}$

Řešení: Graf funkce $y = \frac{1}{2x}$ sestrojíme z grafu $y = \frac{1}{x}$. Můžeme použít pravidlo

d) $\beta)$ tj. $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{(2x)}$: argument je násoben dvojkou a až poté použijeme funkci „jedna lomeno...“ $\Rightarrow$ graf se dvakrát zkrátí ve směru osy x . Je ovšem možné použít i pravidlo d) $\alpha)$ – $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$:

nejdříve použijeme funkci „jedna lomeno...“, poté následuje násobení polovinou $\Rightarrow$ graf se dvakrát zkrátí ve směru osy y . Výsledek je v obou případech stejný.



Příklad 9: Sestrojme grafy funkcí $y = 2^{-x}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 2 \cdot 2^x$; $y = 2^{x+1}$.

Řešení: Graf funkce $y = 2^{-x}$ je souměrný s grafem funkce $y = 2^x$ podle osy y – pravidlo a) β). Funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ je rovna funkci $y = 2^{-x}$, neboť jsou obě definovány pro každé $x \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Graf funkce $y = 2 \cdot 2^x$ vznikne dvojnásobným protažením grafu $y = 2^x$ ve směru osy y – viz pravidlo d) α); graf $y = 2^{x+1}$ posunutím grafu $y = 2^x$ po ose x doleva – viz pravidlo c) β). Také funkce $y = 2 \cdot 2^x$; $y = 2^{x+1}$ jsou si rovny.

Příklad 10: Sestrojme graf funkce $y = \frac{1}{2x-4}$.

Řešení: V konstrukci podobných grafů se studenti dopouštějí velmi často následující chyby: „Základním“ předpisem bude zřejmě nepřímá úměrnost. Sestrojíme graf funkce $y = \frac{1}{x}$ a dvojnásobným zkrácením ve směru osy x – pravidlo d) β) (viz. př. 8). Následuje posunutí grafu ve směru osy x o čtyři jednotky doprava – pravidlo c) β). Výsledný graf vidíme na obrázku vpravo. Tento graf je však chybný, jak se snadno přesvědčíme:

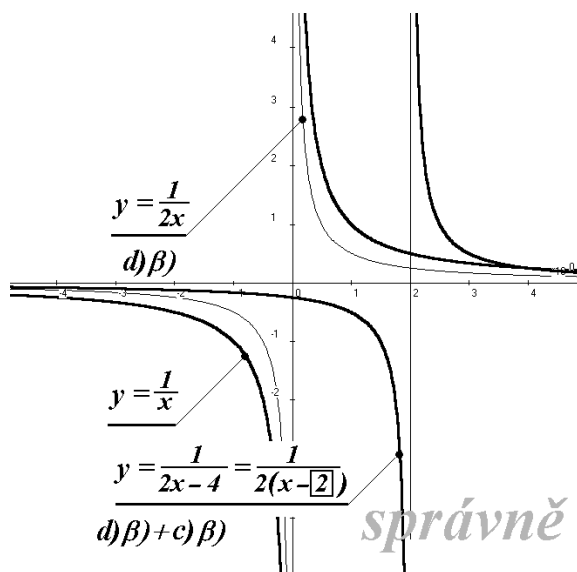
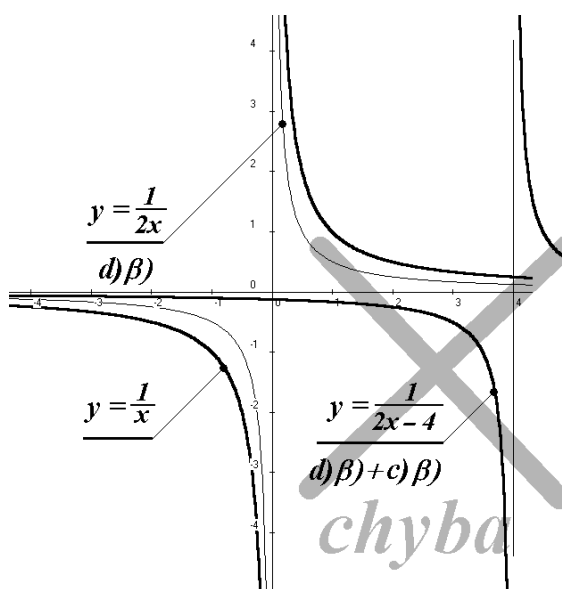
Pro $x = 2$ není funkce $y = \frac{1}{2x-4}$ definována, kdežto na našem grafu funkční hodnotu snadno najdeme: $y = -0.25$. Naopak pro $x = 4$ má být $y = 0.25$, na nesprávném grafu však pro $x = 4$ funkční hodnota chybí. Graf je zřejmě špatně posunut ve směru osy x . Pravidlo c) β) je totiž nutno aplikovat výhradně na „samostatné“ x (tj. $x = 1 \cdot x$), kdežto my jsme čtverku odčítali od $2x$. Proto je třeba před posouváním funkční předpis upravit:

$$y = \frac{1}{2x-4} = \frac{1}{2(x-2)}$$

a ve směru osy x tedy posouvat nikoli o čtyři, ale pouze o dvě jednotky.

Příklad 11: Sestrojme graf funkce $y = \frac{4x-7}{2x-4}$.

Řešení: Funkční předpis musíme opět upravit, „základním“ předpisem bude opět nepřímá úměrnost:



$$y = \frac{4x-7}{2x-4}$$

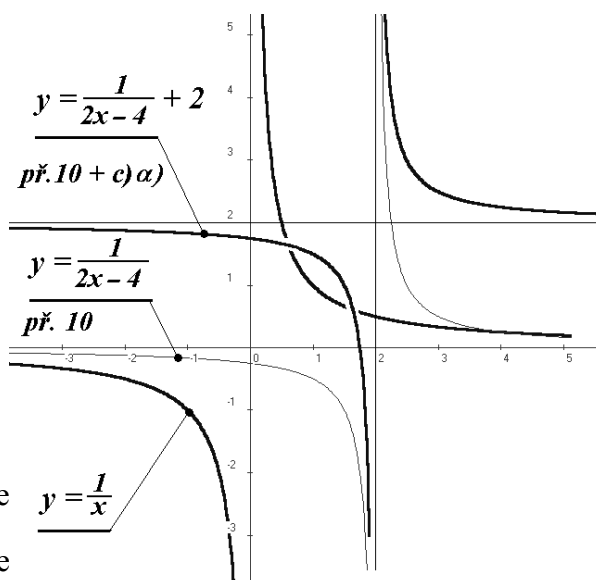
$$y = \frac{4x-8+1}{2x-4}$$

$$y = \frac{4x-8}{2x-4} + \frac{1}{2x-4}$$

$$y = 2 + \frac{1}{2x-4}$$

$$y = \frac{1}{2(x-2)} + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + 2$$

Graf funkce $y = \frac{1}{2(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$ jsme sestrojili v předchozím příkladu. Tento graf je třeba nyní posunout po ose y o dvě jednotky nahoru.



Užití kvadratické funkce při řešení kvadratických nerovnic: Víme, že grafem funkce $y = ax^2 + bx + c$ je parabola. Tohoto faktu lze použít při řešení nerovnic tvaru $ax^2 + bx + c > 0$ (popř. s jinými typy nerovností).

12. Příklad: Řešme kvadratickou nerovnici

$$x^2 + 11x + 24 < 0.$$

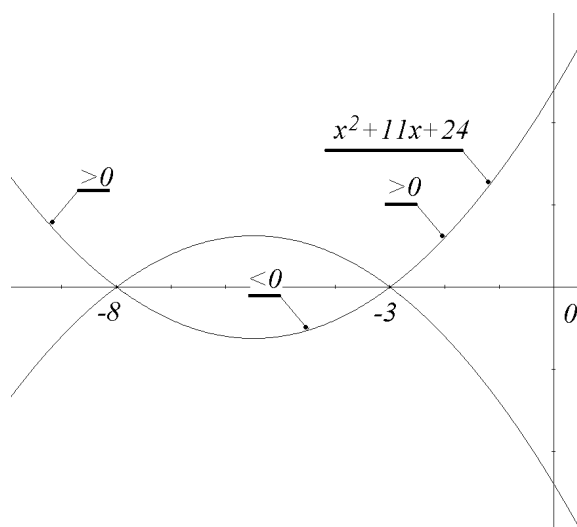
Řešení: Určíme nulové body kvadratického trojčlenu: protože

$$y = x^2 + 11x + 24 = (x+8)(x+3),$$

jsou nulové body $x_1 = -8; x_2 = -3$. Grafem funkce $y = x^2 + 11x + 24$ je parabola, která protíná osu x v nulových bodech kvadratického trojčlenu. Z hlediska našeho řešení jsou pouze dvě možnosti, jak tato parabola vypadá – vidíme je na připojeném obrázku. Z těchto dvou možností vybereme jednu dosazením libovolného nenulového bodu. Např. pro $x = 0$ je

$$y(0) = 0^2 + 0 \cdot x + 24 = 24 > 0,$$

grafem našeho trojčlenu je tedy „horní“ parabola, která má záporné hodnoty v intervalu $(-8; -3)$. Znamená to, že právě tento interval je řešením naší nerovnice (srovnej s kpt. 4.6. př. 4.).



5.12 Posloupnosti

Posloupností rozumíme zobrazení $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ z množiny všech přirozených čísel do množiny všech reálných čísel, tj. funkci, která přirozeným číslům přiřazuje čísla reálná.

Příklady: Zobrazení $P_1: n \rightarrow \frac{1}{n}$ přiřazuje všem přirozeným číslům s výjimkou nuly jejich

převrácenou hodnotu. Zobrazení $P_2: n \rightarrow \frac{n}{n-1}$ přiřazuje každému přirozenému číslu kromě

jedničky zlomek, jehož číselník je roven tomuto číslu a jmenovatel je o jedničku menší. Zobrazení $P_3 : n \rightarrow n^3$ přiřazuje každému přirozenému číslu jeho třetí mocninu.

Tyto posloupnosti lze zapsat jako množiny s „naznačeným výčtem prvků“, tj. např.

$$P_1 = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right\}; \quad P_2 = \left\{0; 2; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots\right\}; \quad P_3 = \{0; 1; 8; 27; 64; \dots\}, \quad \text{popř. stručně } \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n \in \mathbb{N} - \{1\}}; \quad \{n^3\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Číslo, které přiřazujeme číslu n , nazýváme **n -tý člen** a zapisujeme např. $a_n = \frac{n}{n-1}$.

Posloupnost racionálních čísel může být také zadána také **rekurentně**. Znamená to, že je znám první její člen a dále způsob, jak se z členu předchozího získá člen následující.

Příklad: Určeme několik prvních členů posloupnosti zadané rekurentně: $a_1 = 3$;

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \frac{1}{2a_n}.$$

Řešení: Máme $a_1 = 3$;

$$a_2 = \frac{1}{2a_1} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}; \quad a_3 = \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{6}{2} = 3; \quad a_4 = \frac{1}{2a_3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}; \dots$$

Jde o posloupnost $P = \left\{3; \frac{1}{6}; 3; \frac{1}{6}; \dots\right\}$, tj. každý lichý člen je roven třem, každý sudý pak jedné šestině.

Aritmetická posloupnost: je každá posloupnost, kterou lze určit rekurentně vztahy

$$a_1 = a; \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d,$$

kde a, d jsou daná čísla. Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti**.

Pro každé $n > 2$ platí: $a_n = a_{n+1} - d$; $a_n = a_{n-1} + d$. Sečtením těchto rovností dostaneme

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \quad \text{tedy } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Každý člen aritmetické posloupnosti počínaje druhým je tedy aritmetickým průměrem dvou sousedních členů – odtud název aritmetická posloupnost.

Příklady: posloupnost všech lichých přirozených čísel je aritmetická posloupnost, kde $a_1 = 1$; $d = 2$. Posloupnost všech sudých přirozených čísel je aritmetická posloupnost, kde $a_1 = 2$; $d = 2$. Posloupnost všech přirozených čísel dávajících po vydělení sedmi zbytek čtyři je aritmetická posloupnost, kde $a_1 = 4$; $d = 7$.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost, kterou lze určit rekurentně vztahy

$$a_1 = a; \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

kde $a, q \neq 0$ jsou daná čísla. Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**.

Pro každé $n > 2$ platí: $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$; $a_n = q \cdot a_{n+1}$. Vynásobením těchto rovností

dostaneme $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, tedy $|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}| \cdot |a_{n+1}|}$. Absolutní hodnota každého členu geometrické posloupnosti počínaje druhým je tedy geometrickým průměrem absolutních hodnot dvou sousedních členů – odtud název geometrická posloupnost.

Příklady: Posloupnost $\{2^n\}_{n=1}^\infty$ je geometrická posloupnost, kde $a_1 = 2$; $q = 2$. Posloupnost $\{3^{-n}\}_{n=1}^\infty$ je geometrická posloupnost, kde $a_1 = \frac{1}{3}$; $q = \frac{1}{3}$.

Určeme n -tý člen aritmetické a geometrické posloupnosti:

aritmetická posloupnost: Víme, že $\forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$ (1)

platí tedy: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

atd.

Vyslovme hypotézu, že $a_n = a_1 + (n-1)d$, a dokažme ji **matematickou indukcí**.

Pro nejmenší n (v našem případě $n = 2$) vztah platí. Předpokládejme, že vztah platí pro $n = k$, tj. $a_k = a_1 + (k-1)d$, a dokažme, že pak platí i pro $n = k+1$, tj. platí $a_{k+1} = a_1 + kd$:

Je-li tedy $a_k = a_1 + (k-1)d$, je podle (1):

$$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + (k-1)d] + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd.$$

Víme tedy, že hypotéza platí pro $n = 2$ a dále pro každé $k > 1$: jestliže hypotéza platí pro k , platí i pro $k+1$. Podle principu matematické indukce tak hypotéza platí pro každé $n > 1$, tj. pro každé $n > 1$ platí $a_n = a_1 + (n-1)d$. Podobně bychom ukázali, že pro n -tý člen geometrické posloupnosti platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

1. Příklad: Na konci roku připisuje spořitelna 5% z částky na účtu. Na jakou částku vzroste vklad 1000,- Kč po pěti letech?

Řešení: Na konci prvního roku připíše spořitelna 5% z 1000,- Kč, tj. 50,- Kč, takže po prvním roce je na účtu 1050,- Kč. Po druhém roce připíše 5% z částky 1050,- Kč atd. Částky na účtu tvoří geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1000 \text{ Kč}$; $q = 1,05$. Částka na účtu po pěti letech tedy bude $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1000 \cdot 1,05^5 \approx 1276 \text{ Kč}$.

2. Příklad: Poločas rozpadu radia je přibližně 20 minut. Kolik nepřeměněného radia zbude ve vzorku o hmotnosti 1 mg po dvou hodinách?

Řešení: Poločas rozpadu je doba, za kterou se rozpadne polovina atomů ve vzorku. Ve vzorku rádia klesne počet nerozpadených atomů každých dvacet minut na polovinu. Tento děj je popsán geometrickou posloupností, kde $a_1 = 1 \text{ mg}$; $q = 0,5$. Doba dvou hodin je šestkrát delší, než poločas rozpadu, hledáme tedy sedmý člen: $a_7 = a_1 \cdot q^7 = 0,5^7 \approx 0,008 \text{ mg}$.

Určeme součet prvních n členů aritmetické a geometrické posloupnosti. Pro aritmetickou posloupnost je:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \overbrace{a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]}^{a_1 + a_n = 2a_1 + nd}$$

Je vidět, že součet prvního a posledního členu posloupnosti je roven součtu druhého a předposledního členu atd. Je-li celkový počet členů n , těchto součtů je $\frac{n}{2}$. Je tedy

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \text{ Protože } a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ je možné také psát}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

3. Příklad: První člen aritmetické posloupnosti je $a_1 = 6$, součet deseti členů pak $s_{10} = 195$. Určeme desátý člen a_{10} a diferenci d .

Řešení:

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$$

$$s_{10} = 5a_1 + 5a_{10}$$

$$a_{10} = \frac{s_{10} - 5a_1}{5} \Rightarrow a_{10} = \frac{195 - 5 \cdot 6}{5} = 33$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_1}{9} = \frac{33 - 6}{9} = 3$$

4. Příklad: Spodní vrstva dvanácti vrstev srovnaných trubek obsahuje 120 kusů trubek. Kolik trubek je celkem na hromadě, obsahuje-li každá následující vrstva o jednu trubku méně?

Řešení: Jedná se o součet dvanácti členů aritmetické posloupnosti, kde $a_1 = 120$; $d = -1$. Je tedy

$$s_{12} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 12 \cdot 120 + \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot (-1) = 1440 - \frac{132}{2} = 1440 - 66 = 1374$$

Pro součet n členů geometrické posloupnosti máme:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$s_n = a_1 \frac{(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})(1-q)}{1-q}.$$

Roznásobením se můžeme přesvědčit o tom, že výraz v čitateli posledního zlomku je roven

$$1 - q^n, \text{ je tedy } s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

5. Příklad: Určeme první člen a kvocient geometrické posloupnosti, jestliže $a_4 = -\frac{8}{3}$;

$$a_6 = -\frac{32}{3}.$$

Řešení: Protože $a_6 = q^2 a_4$, je

$$q = \sqrt{\frac{a_6}{a_4}} = \sqrt{\frac{-\frac{32}{3}}{-\frac{8}{3}}} = \sqrt{4} = 2; \quad a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{-\frac{8}{3}}{2^3} = -\frac{1}{3}.$$

6. Příklad: Na konci roku připisuje spořitelna 5% z částky na účtu, na který pravidelně ročně ukládáme 1000,- Kč. Jaká částka bude na účtu po uplynutí pátého roku?

Řešení: K tisíci koruně vložené v roce výběru přičítá spořitelna 5%, tj. 50,- Kč. Z této tisíci koruně tedy dostaneme $1000 \cdot 1,05$ Kč. Z tisíci koruně vložené rok předtím obdržíme $1000 \cdot 1,05^2$ atd. Částky získané z vkladů v jednotlivých letech tedy tvoří geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1000 \cdot q = 1000 \cdot 1,05 = 1050$; $q = 1,05$. Celkovou částku dostaneme jako součet pěti členů této posloupnosti, tj.

$$s_5 = a_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 1050 \cdot \frac{1-1,05^5}{1-1,05} \approx 5802 \text{ Kč}.$$

Neřešené úlohy:

- 1) Určete a_1 ; n v aritmetické posloupnosti, jestliže $a_n = 80$; $d = 8$; $s_n = 416$.
- 2) Určete a_1 ; q v geometrické posloupnosti, je-li $a_1 + a_4 = \frac{70}{9}$; $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{28}{9}$.
- 3) Určete teplotu v dole 1015 m pod povrchem, víte-li, že v hloubce 25 m je teplota 9°C a každých 33 m teplota stoupne o 1°C .
- 4) Po průchodu skleněnou deskou ztrácí světelný paprsek pětinu své energie. Kolik procent původní energie mu zůstane po průchodu pěti takovými deskami?
- 5) Předpokládejme, že již ve středověku existovala banka, která přijímala současnou měnu a která funguje dodnes. Při založení Karlovy univerzity v r. 1348 jí její zakladatel Karel IV. věnoval 1,-Kč, kterou uložil na tříprocentní úrok. Jakou částku by univerzita inkasovala v r. 2000?
- 6) Podle staroperské legendy si vynálezce šachové hry řekl o odměnu ve formě pšeničných zrn, a to tak, že za první políčko šachovnice chtěl jedno zrnko, za druhé dvě, za každé následující pak vždy dvojnásobek. Tehdejší perský král Balhir udiven jeho skromností přikázal zrna spočítat a pytlík pšenice přinést. Kolik zrn by musel tento „pytlík“ obsahovat?

Výsledky:

- 1) $a_1 = -16$; $n = 13$ 2) $a_1 = \frac{16}{9}$; $q = \frac{3}{2}$ 3) 39°C 4) asi 33% 5) $1,03^{2000-1348} = 23\,435\,2995 \text{ Kč}$
- 6) $s_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ zrn (několik desítek plně naložených nákladních vlaků pšenice)